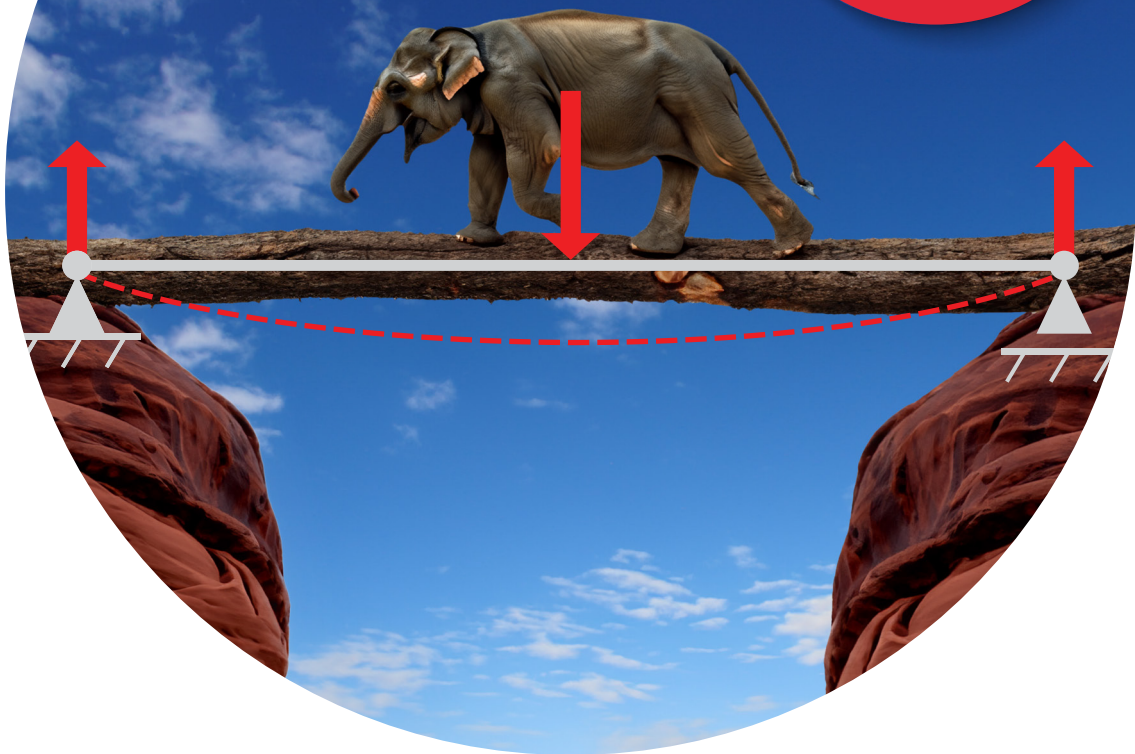




RĪGAS TEHNISKĀ
UNIVERSITĀTE



Materiālu pretestība levads galīgo elementu metodē

Juris Kalinka



Juris Kalinka

MATERIĀLU PRETESTĪBA. IEVADS GALĪGO ELEMENTU METODĒ

Mācību metodiskais līdzeklis

RTU Izdevniecība
Rīga 2024

Juris Kalinka. Materiālu pretestība. Ievads galīgo elementu metodē.

RTU Izdevniecība, 2024, 63 lpp.

Mācību līdzeklis vienkāršoti iepazīstina ar visai sarežģītu inženiertehnisku uzdevumu risināšanas metodi – tā saucamo galīgo elementu metodi. Tas paredzēts studentiem, kuriem specialitātes apgūšanai nepieciešamas zināšanas par siju un stieņu konstrukciju stiprības aprēķiniem. Mācību līdzeklī aplūkotas arī agrāk izmantotās aptuvenās variāciju metodes (Ritca metode), kas ir pamatā datorlaikmetā izmantotajām lielu objektu aprēķinu programmām. Tas studentiem ļaus izprast sarežģītu komercprogrammu darbības principus, kā arī pašiem sastādīt vienkāršas programmas savu uzdevumu atrisināšanai.

Zinātniskais redaktors profesors Andris Čāte

Redaktores Dzintra Birnbauma
 Anita Vēciņa

Datorsalikums Baiba Puriņa

Vāka dizains Paula Lore, Juris Kalinka

© Rīgas Tehniskā universitāte, 2024

© Juris Kalinka, 2024

ISBN 978-9934-37-029-8 (pdf)

SATURS

IEVADS	5
1. APTUVENĀS VARIĀCIJU METODES (RITCA METODE)	6
2. LIECĒ SLOGOTAS SIJAS APRĒĶINS AR GALĪGO ELEMENTU METODI	16
2.1. Pilnās potenciālās enerģijas noteikšana liecē	16
2.2. Sijas lieces uzdevuma risinājums ar GEM.....	20
2.3. Sijas elementa tipiskais bloks (stinguma matrica)	23
3. SIJA UZ ELASTĪGA PAMATA	32
4. GALĪGO ELEMENTU METODES IZMANTOŠANA ĻODZES APRĒĶINOS	35
5. GALĪGO ELEMENTU METODES LIETOJUMS SIJAS SVĀRSTĪBU APRĒĶINOS	44
6. SIJAS BRĪVĀS SVĀRSTĪBAS	47
7. KOPSAVILKUMS	58
Sijas statiskā liece.....	58
Sija uz elastīga pamata.....	59
Sijas ļodze	59
Sijas liece un ļodze.....	60
Sijas brīvās svārstības.....	61
Sijas uzspiestās svārstības.....	62

APZĪMĒJUMI

Π – pilnā potenciālā enerģija

U – deformētā elementā uzkrātā potenciālā enerģija

H – ārējo spēku zaudētais darbs

C – koeficients

u – sijas vertikālie pārvietojumi

u' – leņķiskie pārvietojumi

η – šķēluma koordināta

P – spēks

P_k – kritiskais spēks

M – moments

Q – šķērsspēks

k – koeficients

φ – funkcija

E – elastības modulis

I – inerces moments

W – pretestības moments

L – galīgā elementa garums

l – garums

K – kinētiskā enerģija

γ – īpatnējā masa

ω – uzspiesto svārstību frekvence

p – pašsvārstību frekvence

t – laiks

δ – pārvietojums no spēka vieninieka

D – determinants

m – masa

g – brīvās krišanas paātrinājums

σ – normālais spriegums

τ – tangenciālais spriegums

IEVADS

Materiālu pretestība ir zinātne par mašīnu un konstrukciju detaļu stiprību — materiāla pretestību ārējai slodzei. Materiālu pretestības aprēķinus visbiežāk veic vienam no svarīgākajiem konstrukciju elementiem – sijai jeb stienim, t. i., ķermeni, kura garums ir daudzkārt lielāks par šķērsriezuma laukumu. Galvenais materiālu pretestības uzdevums ir aprēķināt tādus stieņa šķērsriezuma laukuma izmērus, kas iztur pielikto slodzi. Šāda stiprības uzdevuma risināšanā var izmantot klasisko metodi, kuras pamatā ir trīs vienādojumu grupas:

- 1) līdzsvara vienādojumi (mehānika);
- 2) deformāciju vienādojumi – eksperimentāli novērotu deformāciju matemātisks pieraksts, zināms kā plakano šķēlumu hipotēze (ģeometrija);
- 3) sakarības starp spēkiem un deformācijām, kuras iegūst eksperimentāli slogojot materiālu un ir atkarīgas no materiāla fizikālajām īpašībām (fizika).

Izmantojot šīs trīs vienādojumu grupas, var noteikt sakarības, kas nepieciešamas šķērsriezuma laukuma izmēru noteikšanai.

Stiprības uzdevumu risināšanā var izmantot arī citas metodes, piemēram, potenciālās enerģijas minimuma principu – sistēma ir līdzsvarā tad, ja tās potenciālā enerģija ir minimāla. Šī principa izpausmi var novērot vienkāršā eksperimentā: lodīte uz nelidzenas virsmas ripo un paliek nekustīga līdzsvara stāvoklī tikai tad, ja atrodas virsmas zemākajā punktā.

Šobrīd materiālu pretestības uzdevumu risināšanā vairs neizmanto tikai trīs klasiskās fizikas pamatā esošos Ņūtona likumus, bet gan lieto dažādas efektīvas skaitļošanas metodes, kā arī programmatūru un dažādus mehānikas principus.

Piemēram, potenciālās enerģijas metodi izmanto tādu konstrukciju aptuvenos aprēķinos, kurām precīzais atrisinājums nav iespējams vai ir ļoti grūti realizējams. Savukārt vēsturiski pirmās attīstījās variāciju metodes, kas kļuva par pamatu mūsdienās plaši izplatītai aprēķinu metodei – galīgo elementu metodei (GEM).

Šajā metodiskajā līdzeklī parādīts, kā GEM var lietot materiālu pretestības uzdevumu risināšanā, izmantojot visvienkāršāko galīgo elementu formu – taisnes nogriezni. Nogriezni var iegūt, tikai dalot elementos stieni (siju). GEM būtību studentiem vieglāk izprast, patstāvīgi risinot materiālu pretestības uzdevumus, kuros izmanto šo vienkāršāko galīgo elementu formu.

1. APTUVENĀS VARIĀCIJU METODES (RITCA METODE)

Ķermeņa deformācijas rodas ārējo spēku iedarbības rezultātā.

Ķermenis ar savu masu saspiež atsperi un zaudē daļu savas potenciālās enerģijas, nonākot zemākā stāvoklī. Tātad deformējamās sistēmas potenciālā enerģija Π sastāv no deformējamā elementā uzkrātās enerģijas U un ārējo spēku zaudētās enerģijas H jeb $\Pi = U - H$.

Lai noteiktu potenciālās enerģijas minimumu, ir jāatrod tādas funkcijas, kas nodrošina potenciālās enerģijas mazāko vērtību. Tas nozīmē, ka ir jāvariē funkciju veids, lai atrastu piemērotās. Tātad deformējama ķermeņa gadījumā potenciālā enerģija nav funkcija, bet ir funkcionālis.

Funkcionālis ir noteiktais integrālis, kura skaitliskā vērtība ir atkarīga no tā, kāda funkcija izvēlēta zemintegrāļa izteiksmē. Diemžēl nav precīzas metodes, ar kuras palīdzību varētu izvēlēties tādu funkciju $u(\eta)$, kas nodrošina potenciālās enerģijas minimālo vērtību. Toties ir rastas efektīvas aptuvenās metodes, kas dod vēlamās precizitātes rezultātus.

Lietojot aptuvenās variāciju metodes, tiek uzdots funkcionāli minimizējošas funkcijas veids, bet nezināmais lielums ir tikai koeficients C pie izvēlētās funkcijas. Pēc integrēšanas potenciālā enerģija kļūst par funkciju no nezināmā koeficienta C . Minimizējot, t. i., atvasinot pēc šī koeficienta C integrēto potenciālās enerģijas izteiksmi, iegūst tādu koeficienta C vērtību, kas izvēlētajam funkcijas veidam visvairāk tuvojas precīzai funkcijas vērtībai.

Aplūkosim materiālu pretestības uzdevumu – sijas lieci.

Meklējamo sijas izlieces funkciju $u(\eta)$ aizstāj ar rindu:

$$u(\eta) \approx \tilde{u}(\eta) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(\eta), \quad (1.1.)$$

kur funkcijas $\varphi_k(\eta)$ var izvēlēties, bet koeficientus C_k nosaka tāds, lai potenciālā enerģija būtu pēc iespējas minimāla.

Sijas lieces potenciālās enerģijas izteiksmē

$$\Pi = U - H = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta - Pu - Mu' \quad (1.2.)$$

funkcijas $u(\eta)$ veids ir zināms (to var brīvi izvēlēties). Tādēļ Π no funkcionāļa pārvēršas par funkciju, kurai nosaka minimumu, Π atvasinājumus pēc C pielīdzinot nullei:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Rezultāts būs precīzāks, ja rinda (1.1.) precīzāk aprakstīs faktisko izlieci. Tādēļ, pirms uzdevuma risināšanas izvēloties $\varphi_k(\eta)$, jānodrošina viss, kas zināms (robežnosacījumi) par pārvietojumiem $u(\eta)$ un pagriezienu leņķiem $u'(\eta)$.

Risināšanas algoritms

1. Izvēlas tādu $\tilde{u}(\eta)$, lai būtu apmierināti galvenie robežnosacījumi $u(\eta)$ un $u'(\eta)$:

$$\tilde{u}(\eta) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(\eta).$$

2. Funkcionālī (1.2.) ievieto aptuveno izlieces izteiksmi $\tilde{u}(\eta)$ un integrē.
3. No minimuma nosacījuma $\partial\Pi/\partial C_k = 0$; $k = 1, 2, \dots, n$ iegūst vienādojumu sistēmu C_k noteikšanai.
4. Pēc C_k aprēķināšanas ir zināma funkcija $\tilde{u}(\eta)$ un var uzzīmēt momentu $M(\eta) = EI u''(\eta)$ un šķērsspēku $Q(\eta) = EI u'''(\eta)$ epīras.
5. Zinot $M(\eta)$ un $Q(\eta)$ var aprēķināt spriegumus un sijas izmērus.

Šai metodē līdzsvara noteikumi netiek sastādīti, tādēļ nav svarīgi, vai uzdevums ir statiski noteicams vai nenoteicams.

Šo metodi attīstīja ievērojamais angļu fiziķis Relejs (Džons Viljams Stretts jeb lords Relejs, 1842–1919), un 1877. gadā tā tika publicēta viņa grāmatā "Skaņas teorija".

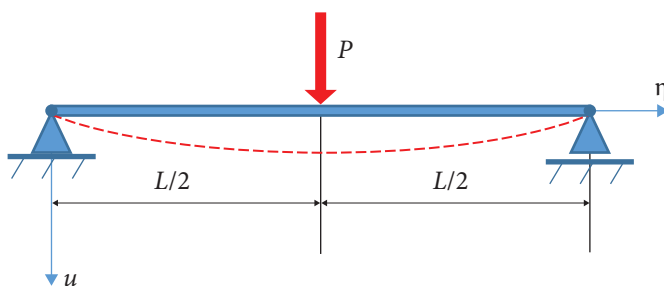
Ja meklējamās funkcijas aptuveno izteiksmi ievieto tieši potenciālās enerģijas izteiksmē, tad tā ir Ritca metode.

1908. gadā šveiciešu zinātnieks Valters Ritcs (*Ritz*, 1878–1909) matemātiski pamatoja šo metodi. Šobrīd Ritca metode tiek izmantota ne tikai konstrukciju statiskajos aprēķinos, bet arī svārstību teorijā, stabilitātes teorijā, kā arī plātņu un čaulu aprēķinos.

1. PIEMĒRS

Horizontāla sija galos balstīta uz šarnīriem un vidū slogota ar vertikālu spēku P (1.1. att.). Sijas stingums liecē EI .

Aprēķināt maksimālo sijas izlieci un lielākā lieces momenta vērtību.



1.1. att.

Ir plašas iespējas izvēlēties izlieces funkciju, bet prakse rāda, ka ērtākās ir trigonometriskās funkcijas un polinomi.

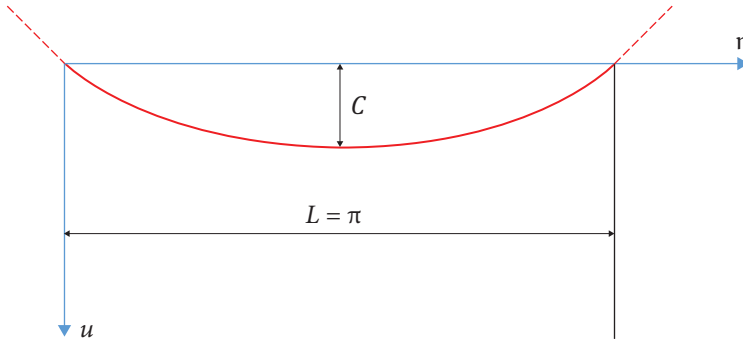
1. Izvēlas funkciju:

$$\tilde{u}(\eta) = C \sin\left(\frac{\pi\eta}{L}\right), \quad 0 \leq \eta \leq L. \quad (1.3.)$$

C – parametrs, kas vienāds ar lielāko izlieci sijas vidū zem spēka P , jeb sinusoidas amplitūda.

Sinusa funkcija (1.3.) ir sevišķi piemērota galos balstītas sijas aprēķiniem, jo apmierina ne tikai robežnoteikumus ($u = 0$ pie $\eta = 0$ un $\eta = L$, bet arī ($u'' = 0$ pie $\eta = 0$ un $\eta = L$), jo pārvietojuma $u(\eta)$ otrais atvasinājums u'' ir proporcionāls lieces momentam, bet no uzdevuma shēmas redzams, ka lieces moments gala punktu šarnīros ir nulle.

Izvēlētās funkcijas $\tilde{u}(\eta) = C \sin(\pi\eta/L)$, $0 \leq \eta \leq L$ grafiks (1.2. att.).



1.2. att.

Redzams, ka šādas sinusoidas pusviļņa grafiks (1.2. att.) pēc izskata ir ļoti līdzīgs iespējamai sijas izliecei.

2. Sijas deformācijas enerģijas izteiksmē

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta$$

ievieto aptuveno funkciju (1.3.) un iegūst:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{\pi^4 C^2}{L^4} \sin^2 \frac{\pi\eta}{L} d\eta.$$

Pēc integrēšanas:

$$U = \frac{\pi^4 EIC^2}{4L^3}.$$

3. Pilnā potenciālā enerģija

$$\Pi = U - PC = \frac{\pi^4 EIC^2}{4L^3} - PC.$$

Te potenciālā enerģija ir izteikta ar parametru C , kas pagaidām ir nezināms lielums. Izvēloties sijas deformētā stāvokļa funkciju (1.3.), tika izmantots tikai viens parametrs C . Šim parametram jābūt tik lielam, lai potenciālā enerģija būtu minimāla. Lai noteiktu minimumu, atvasinājums jāpielīdzina nullei:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C} = \frac{\pi^4 EIC}{2L^3} - P = 0.$$

No iegūtā vienādojuma var aprēķināt C :

$$C = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} = 0,02053 \frac{PL^3}{EI}.$$

Precīzā izlieces vērtība sijas vidū ir:

$$C = \frac{PL^3}{48EI} = 0,02083 \frac{PL^3}{EI}.$$

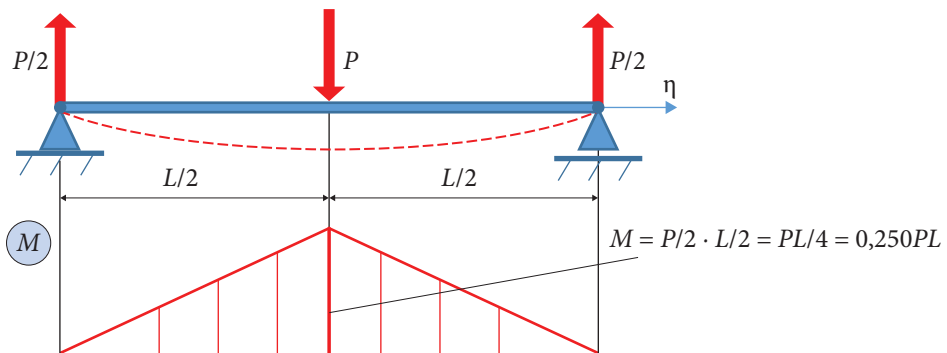
4. Lieces moments sijā:

$$M = -EIu'' = -EI \left(-\frac{\pi^2 C}{L^2} \sin \frac{\pi \eta}{L} \right),$$

ievietojot aprēķināto C vērtību:

$$M = \frac{2PL}{\pi^2} \sin \frac{\pi \eta}{L}. \quad (1.4.)$$

5. Lai novērtētu aprēķina kļūdu, salīdzina lielāko momentu vērtības sijas vidū pie $\eta = L/2$ (1.3. att.).



1.3. att.

Aptuvenā vērtība pēc Ritca metodes, kas aprēķināta, izmantojot (1.4.) izteiksmi, ir $0,203PL$, bet precīzā momenta vērtība ir $0,250PL$. Redzams, ka kļūda momenta aprēķinā ir daudz lielāka (19 %) nekā aprēķinot izlieci, kur kļūda ir tikai 2 %.

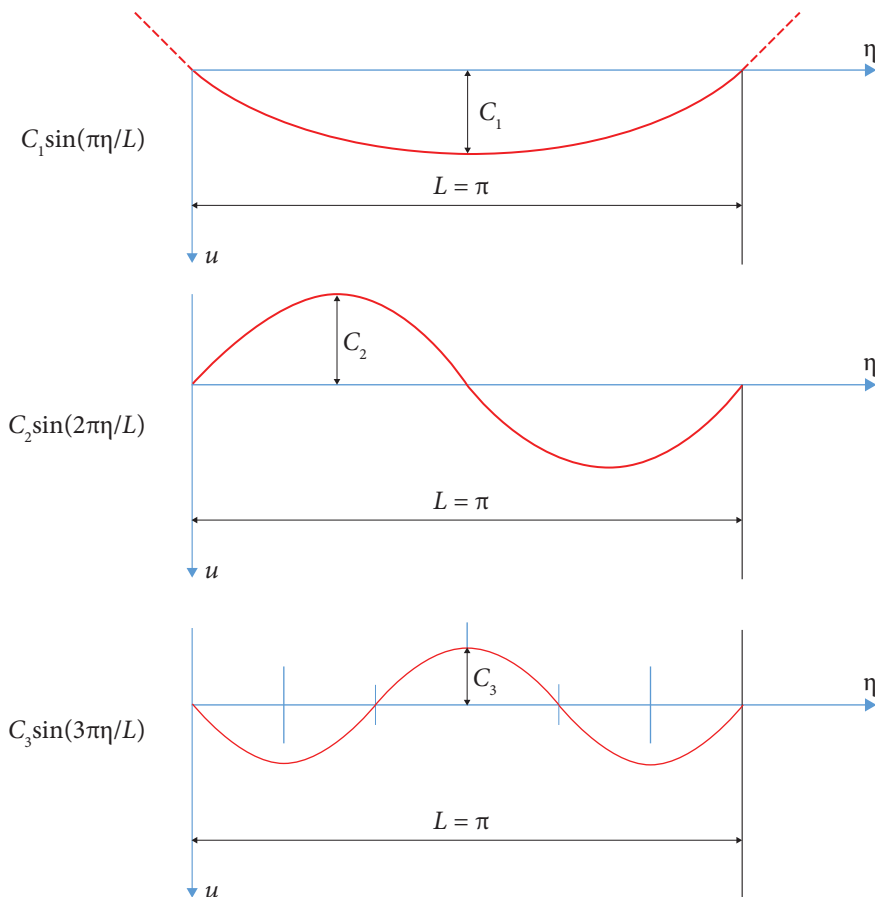
Precīzās momenta vērtības aprēķins

Lai iegūtu precīzāku rezultātu, jāizvēlas precīzāka pārvietojumu (izlieces) funkcija vai iepriekš izvēlētai funkcijai jāņem vairāk locekļu.

Izvēlas sinusoidālas funkcijas trīs locekļus:

$$u = C_1 \sin\left(\frac{\pi\eta}{L}\right) + C_2 \sin\left(\frac{2\pi\eta}{L}\right) + C_3 \sin\left(\frac{3\pi\eta}{L}\right), \quad 0 \leq \eta \leq L. \quad (1.5.)$$

Lai novērtētu izvēli, zīmē šīs funkcijas (1.5.) atsevišķo locekļu grafikus (1.4. att.).



1.4. att.

No funkciju grafikiem (1.4. att.) redzams, ka otrās funkcijas aprakstītā izliece ir nesimetriska un vidusdaļā zem spēka P pārvietojums ir "0", kas ir pilnīgi pretēji gaidāmajai izliecei, tādēļ šāds funkcijas loceklis nav izmantojams un ir jāatmet, bet jāpatur tikai pirmais un trešais.

Veicot atkārtoti visus aprēķina etapus, izvēlēto funkciju

$$u = C_1 \sin\left(\frac{\pi\eta}{L}\right) + 0 + C_3 \sin\left(\frac{3\pi\eta}{L}\right), \quad 0 \leq \eta \leq L \quad (1.6.)$$

ievieto izteiksmē $U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta$, iegūst:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\pi^2 C_1}{L^2} \sin \frac{\pi\eta}{L} + \frac{9\pi^2 C_3}{L^2} \sin \frac{3\pi\eta}{L} \right)^2 d\eta$$

vai pārveidojot:

$$U = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (C_1^2 + 81C_3^2).$$

Spēka P potenciālā enerģija ir $-PC$, kur C ir sijas izliece vidusdaļā zem spēka P . No funkciju grafikiem redzams, ka $C = C_1 - C_3$.

Tad pilnā potenciālā enerģija ir:

$$\Pi = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (C_1^2 + 81C_3^2) - P(C_1 - C_3).$$

Lietojot potenciālās enerģijas minimuma principu, iegūst vienādojumus koeficientu C_1 un C_3 aprēķinam:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = \frac{\pi^4 EIC_1}{2L^3} - P = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_3} = \frac{81\pi^4 EIC_3}{2L^3} + P = 0,$$

no tiem aprēķina pašus koeficientus:

$$C_1 = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI};$$

$$C_3 = -\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}.$$

Ievietojot iegūtos rezultātus sākumā izvēlētajā izlieces funkcijā (1.6.), iegūst aptuveno vienādojumu sijas izlieces līnijai pēc Ritca metodes:

$$u = \frac{2PL^3}{81\pi^4 EI} \left(81 \sin \frac{\pi x}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L} \right).$$

Lai novērtētu iegūtā rezultāta precizitāti, aprēķina izlieci sijas vidū, ja $\eta = L/2$

$$C = -\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI} (81+1) = 0,02078 \frac{PL^3}{EI}.$$

Šis rezultāts ir daudz precīzāks par izlieci, ko ieguva ar viena locekļa aproksimāciju, un ir tuvu precīzajai vērtībai $0,02083PL^3/EI$.

Lieces moments:

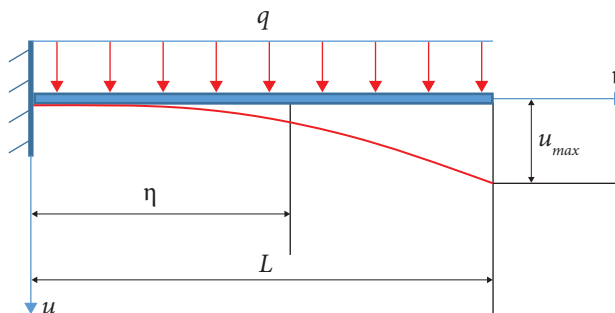
$$M = -EIu'' = \frac{2PL}{9\pi^2} \left(9 \sin \frac{\pi\eta}{L} - \sin \frac{3\pi\eta}{L} \right).$$

Šī aptuvenā lieces momenta lielākā vērtība pie $\eta = L/2$ ir $0,225PL$, bet precīzā ir $0,250PL$. Redzams, ka arī momenta aprēķina kļūda ir mazāka nekā aprēķinā ar viena locekļa aproksimāciju.

Vēl precīzāku rezultātu var iegūt, izvēloties vēl vairāk aproksimējošās funkcijas locekļus. Tas nozīmē arī papildu koeficientu aprēķināšanu.

2. PIEMĒRS

Aprēķināt lielāko izlieci un maksimālos spriegumus konslei, kas slogota ar izklieātu slodzi (1.5. att.).

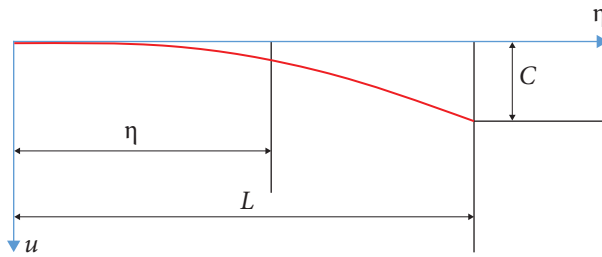


1.5. att.

1. Izvēlas funkciju, kuras grafiks pēc iespējas līdzīgāks sijas deformētā stāvokļa liknei. Izvēlas trigonometrisku funkciju, kuras pusviļņa grafiks ir ļoti līdzīgs konsles deformētajam stāvoklim:

$$u = C \left(1 - \cos \frac{\pi\eta}{2L} \right), \quad (1.7.)$$

kuras grafiks ir (1.6. att.).



1.6. att.

Šāda funkcija (1.6. att.) pie jebkuras koeficienta C vērtības apmierina ģeometriskos robežnoteikumus: pie $\eta = 0$, $u = 0$ un $u' = 0$, ($C = u_{\max}$).

2. Sijas deformācijas pilnā enerģija šajā gadījumā ir:

$$\Pi = U - H = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (u'')^2 - qu \right] d\eta.$$

Izvēlēto funkciju (1.7.) ievieto pilnās enerģijas izteiksmē:

$$\begin{aligned} \Pi = U - H &= \int_0^L \left[\frac{1}{2} EIC^2 \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi\eta}{2L} - qC \left(1 - \cos \frac{\pi\eta}{2L} \right) \right] d\eta = \\ &= \frac{1}{2} EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 C^2 \int_0^L \cos^2 \frac{\pi\eta}{2L} d\eta - qC \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi\eta}{2L} \right) d\eta. \end{aligned}$$

Aprēķina integrāļus:

$$\int_0^L \cos^2 \frac{\pi\eta}{2L} d\eta = \frac{L}{2},$$

$$\int_0^L \cos \frac{\pi\eta}{2L} d\eta = \frac{2L}{\pi}.$$

Tad pilnā potenciālā enerģija ir:

$$\Pi = \frac{1}{2} EIC^2 \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \frac{L}{2} - qCL \left(1 - \frac{2}{\pi} \right).$$

3. No minimuma nosacījuma $d\Pi/dC = 0$ iegūst vienādojumu C noteikšanai:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C} = EIC \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \frac{L}{2} - qL \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0$$

un no tā izsaka C :

$$C = \frac{qL^4}{EI} \frac{32}{\pi^4} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

4. Sijas izlieces vienādojums (1.7.) tagad ir:

$$u = C \left(1 - \cos \frac{\pi\eta}{2L}\right) = \frac{qL^4}{EI} \frac{32}{\pi^4} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi\eta}{2L}\right).$$

Lai novērtētu precizitāti, salīdzina maksimālās izlieces vērtību (pie $\eta = L$), kas aprēķināta ar aptuveno Ritca metodi un ar precīzo metodi.

Pēc Ritca metodes:

$$u_{\max} = 0,11937 \frac{qL^4}{EI}.$$

Precizā vērtība:

$$\frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} = 0,12500 \frac{qL^4}{EI}.$$

Kļūda ir 4,5 % no precīzās metodes rezultāta.

5. Nosaka maksimālo spriegumu pēc abām metodēm.

Pēc Ritca metodes:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{EIu''}{W} = \frac{EI}{W} C \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos \frac{\pi\eta}{2L};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{8}{\pi^2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{qL^2}{W} = 0,29454 \frac{qL^2}{W}.$$

Pēc precīzās metodes:

$$\sigma_{\max} = \frac{qL^2}{2W} = 0,5 \frac{qL^2}{W}.$$

Redzams, ka kļūda ir ievērojama – 41 %. Var secināt, ka Ritca metode šajā piemērā dod labāku rezultātu pārvietojumu aprēķinā nekā spriegumu aprēķinā. Šādu rezultātu varēja paredzēt, jo sākotnēji tika izvēlēta funkcija, pēc iespējas labāk atbilstoša sijas izlieces liknei, nevis tās atvasinājumiem. Aplūkotajā piemērā spriegumi σ ir proporcionāli izlieces otrajam atvasinājumam u'' .

Lai uzlabotu Ritca metodes precizitāti, ir jāizvēlas precīzākas funkcijas, to var panākt, piemēram, izvēloties funkciju kā rindu, kuras pirmais loceklis ir iepriekš izvēlēta funkcija:

$$u = \sum_{k=1}^n C_k \left(1 - \cos \frac{k\pi\eta}{2L}\right), \quad \text{kur } k = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Tabulā parādīti rezultāti, kas iegūti, ņemot dažādu rindas locekļu skaitu.

Redzams, ka kļūda samazinās, ja palielina rindas locekļu skaitu, taču pieaug aprēķina darbietilpība.

	Locekļu skaits	u_{\max}	Kļūda, %	σ_{\max}	Kļūda, %
Aptuvenā Ritca metode	1	$0,11937 \frac{qL^4}{EI}$	4,5	$0,29454 \frac{qL^2}{W}$	41,3
	2	$0,12429 \frac{qL^4}{EI}$	0,57	$0,40372 \frac{qL^2}{W}$	19,2
	3	$0,12475 \frac{qL^4}{EI}$	0,20	$0,43202 \frac{qL^2}{W}$	13,6
	4	$0,12490 \frac{qL^4}{EI}$	0,08	$0,45006 \frac{qL^2}{W}$	10,0
	5	$0,12496 \frac{qL^4}{EI}$	0,03	$0,45936 \frac{qL^2}{W}$	8,1
Precīzā metode	-	$0,12500 \frac{qL^4}{EI}$	-	$0,50000 \frac{qL^2}{W}$	-

2. LIECĒ SLOGOTAS SIJAS APRĒĶINS AR GALĪGO ELEMENTU METODI

Ritca metodē galarezultāts ir atkarīgs no veicsmīgas sijas izlieces funkcijas izvēles visā sijas garumā, tātad no autora kvalifikācijas. Aprēķinu precizitāti varētu uzlabot, izvēloties vienkāršāku izlieces funkciju isākā sijas posmā (elementā), bet ņemt lielāku skaitu šo elementu. Tas, protams, padara aprēķinu daudz sarežģītāku, taču to var paveikt skaitļošanas tehnika. Šī doma ir galīgo elementu metodes (GEM) pamatā, izmantojot Ritca metodes ideju.

GEM, tāpat kā Ritca metode, izmanto potenciālās enerģijas minimuma principu: slogota sija deformējas un ieņem tādu deformēto līdzsvara stāvokli, pie kura sijas pilnā potenciālā enerģija ir minimāla.

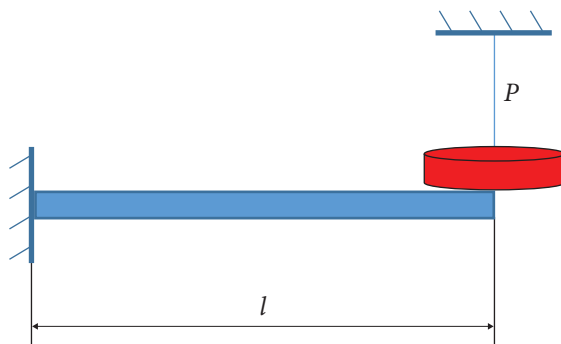
Tātad, lai atrisinātu stiprības uzdevumu:

- 1) sastāda pilnās potenciālās enerģijas izteiksmi liecē slogotai sijai;
- 2) matemātiski pieraksta potenciālās enerģijas minimuma noteikumus;
- 3) no minimuma noteikumiem aprēķina faktisko deformēto stāvokli;
- 4) zinot deformēto stāvokli, aprēķina iekšējo spēku faktoros un risina stiprības uzdevumu.

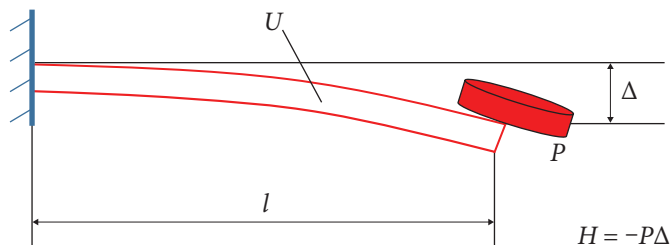
2.1. PILNĀS POTENCIĀLĀS ENERĢIJAS NOTEIKŠANA LIECĒ

Deformējama ķermeņa potenciālā enerģija Π sastāv no divām daļām: enerģijas U , ko uzkrāj deformētais ķermenis, un enerģijas $-H$, ko zaudē ārēji pieliktie spēki:

$$\Pi = U - H.$$



2.1. att.



2.2. att.

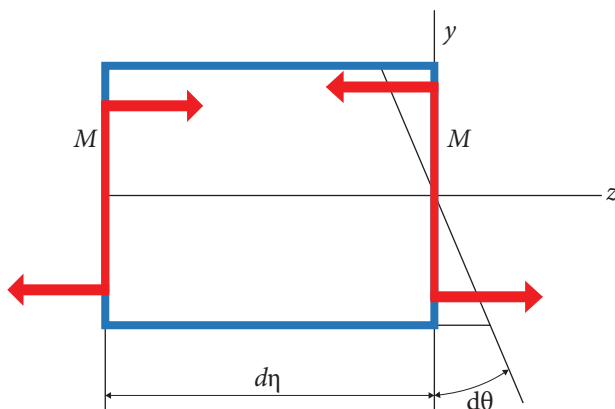
Sistēma sastāv no vienā galā iespīlētas sijas un atsvara, kas iekārts saitē un pie-skaras sijai brīvajā galā, bet vēl nenoslogo to. Sija ir nedeformētā stāvoklī (2.1. att.). Kad saite tiek pārgriezta, atsvars noslogo siju (2.2. att.).

Sija deformējas un tajā uzkrājas deformāciju enerģija U , bet atsvars P pārvieto-jas uz leju par sijas izlieci Δ un zaudē enerģiju (padara darbu):

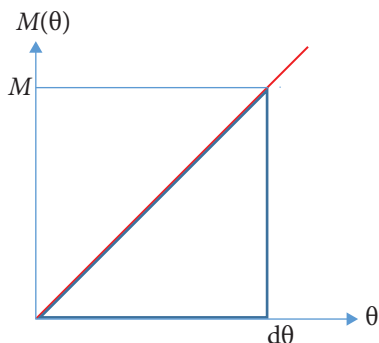
$$H = -P\Delta.$$

Sijas iekšējos šķēlumos rodas lieces moments M un šķērsspēks Q , kas deformē siju. Tā kā deformācijas no Q ir daudz mazākas nekā no M , tad turpmāk šķērsspē-ku Q enerģijas aprēķinos neņem vērā. Jo lielāka ir sijas garuma attiecība pret tās augstumu, jo mazāka ir Q ietekme.

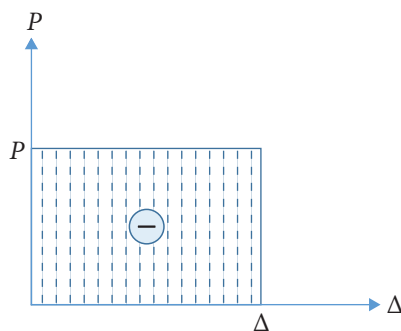
Enerģijas aprēķinam no lieces momenta M izmanto bezgalīgi mazu sijas elementu garumā $d\eta$ (2.3. att.). Slogojums nepārsniedz Huka likuma robežas (2.4. att.), slogojuma grafiks ir lineārs. Uz vienas ass atlikts moments M , uz otras tā izraisītais pārvietojums – pagrieziena leņķis $d\theta$.



2.3. att.



2.4. att.



2.5. att.

Bezgalīgi mazā elementā no lieces momenta uzkrātā enerģija ir vienāda ar momenta M reizinājumu ar pagrieziena leņķi $d\theta$:

$$dU_M = \frac{1}{2} M d\theta.$$

Visas sijas garumā uzkrāto enerģiju var noteikt, summējot visu bezgalīgi mazo elementu enerģijas sijas garumā l , tātad integrējot:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^l M d\theta. \quad (2.1.)$$

Sijā uzkrāto enerģiju grafiski attēlo trīsstūra laukums 2.4. attēlā. Izmantojot sijas liektās ass diferenciālvienādojumu:

$$M = EIu'', \text{ kur } u' = \theta, u'' = \frac{d\theta}{d\eta}.$$

No izteiksmes (2.1.) var izslēgt vai nu M , vai $d\theta$ un iegūt enerģiju U_M no sijas deformācijas, ko var pierakstīt divējādi:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} d\eta \text{ vai } U_M = \frac{1}{2} \int_0^l EI (u'')^2 d\eta.$$

Noslogojot siju (diegs tiek pārgriezts), atsvars P pārvietojas uz leju par lielu Δ un sistēmas enerģija samazinās par lielumu $-P\Delta$.

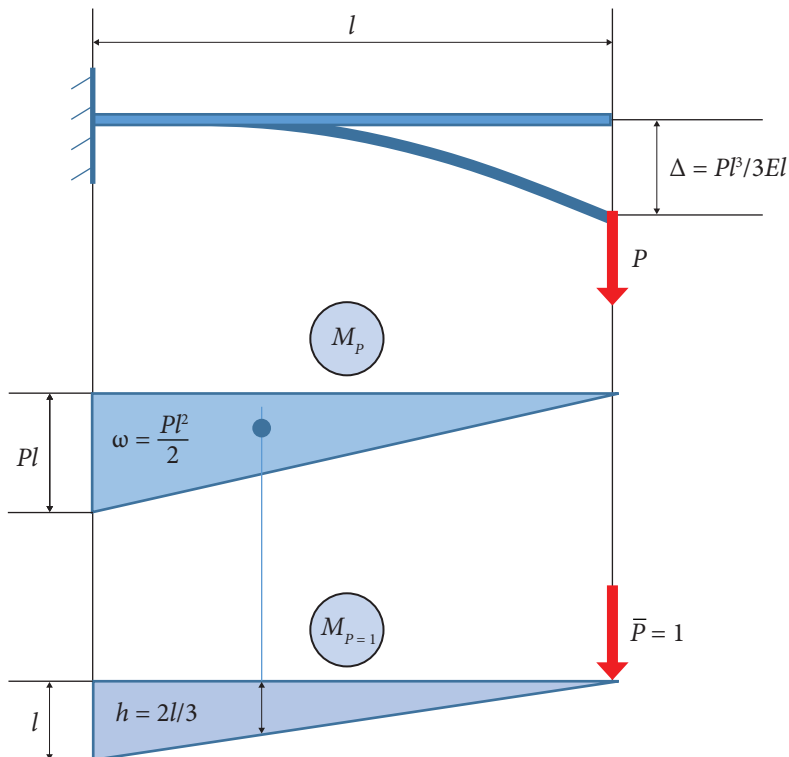
Grafiski tas ir taisnstūra laukums ar mīnus zīmi (2.5. att.).

Deformējamās sistēmas pilnā potenciālā enerģija sastāv no deformāciju enerģijas U , kas tiek uzkrāta sijā, un enerģijas H , ko zaudē ārējie spēki.

Tādēļ ārējo spēku darbs H ir jāraksta ar mīnus zīmi: $\Pi = U - H$.

Lieces potenciālās enerģijas aprēķins šai sijai, kur $M = P\eta$:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 \eta^2}{EI} d\eta = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l \eta^2 d\eta = \frac{P^2}{2EI} \frac{\eta^3}{3}.$$



2.6. att.

Ievietojot integrēšanas robežas no "0" līdz "1", iegūst:

$$U_M = \frac{P^2}{2EI} \frac{l^3}{3} = \frac{P}{2} \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{P}{2} \Delta.$$

No aprēķina redzams, ka sijas potenciālā enerģija ir $U_M = P/2\Delta$.

Sijas brīvā gala pārvietojumu Δ aprēķina ar Vereščagina paņēmieni (2.6. att.):

$$\Delta = \frac{\omega h}{EI} = \frac{Pl}{EI} \frac{l}{2} \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Siju slogojošais atsvars zaudē enerģiju (padara darbu) – $P\Delta$, bet pēc aprēķina redzams, ka sijas potenciālā enerģija ir tikai $U_M = P/2\Delta$. Pārējā enerģijas daļa tiek patērēta iekšējās berzes pārvarēšanai, daļa pārvēršas siltumā, kinētiskajā enerģijā utt. Noņemot slodzi P , deformētā sija ir spējīga atgriezt enerģiju, kas ir vienāda tikai ar lieces potenciālo enerģiju:

$$U_M = \frac{P}{2} \Delta.$$

2.2. SIJAS LIECES UZDEVUMA RISINĀJUMS AR GEM

Galīgo elementu metode (GEM) ir plaši lietota skaitliska metode inženier-tehnisku uzdevumu risināšanā. Ar GEM var aprēķināt spriegumus un noteikt stiprību sarežģītās mehāniskās konstrukcijās, analizēt šķidrums vai gāzes plūsmu cauruļvados, risināt svārstību uzdevumus un daudzas citas problēmas.

GEM strauji attīstījās un tika plaši lietota vienlaikus ar skaitļošanas tehnikas attīstību.

GEM pamatideja: sadala veselo siju vienādos galīga skaita elementos. Atsevišķam elementam sastāda potenciālās enerģijas izteiksmi, kas piemērota jebkuram elementam.

Visas sijas enerģiju iegūst, summējot atsevišķo elementu enerģijas. Minimizējot visu sijas enerģiju, iegūst algebrisku vienādojumu sistēmu pārvietojumu aprēķināšanai GE (galīgo elementu) gala punktos (mezglu punktos).

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūst pārvietojumus mezglu punktos, kurus pēc tam izmanto lieces momenta, šķērsspēka un stiprības aprēķināšanai.

Sijas lieces uzdevuma risināšanas algoritms ar GEM

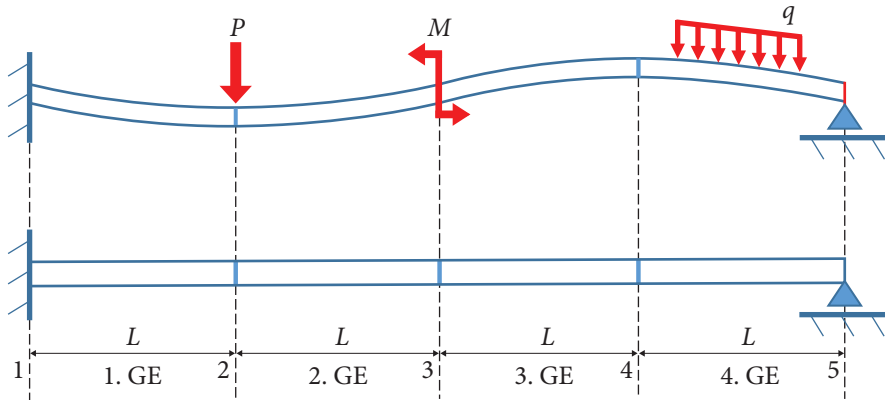
1. GE deformācijas aprakstošu funkciju (vienādu visiem GE) var izvēlēties vienkāršu, jo šai funkcijai jāapmierina tikai robežnoteikumi GE savienojumu vietās – mezglu punktos, kuros blakus elementu pārvietojumiem un pagrieziena leņķiem jābūt vienādiem.
2. Viena elementa potenciālās enerģijas izteiksmē ievieto izvēlēto funkciju.
3. Summējot visu GE enerģijas, iegūst visas sijas potenciālo enerģiju.
4. Minimizējot (atvasinājumu pielīdzinot nullei) potenciālo enerģiju, iegūst algebrisku vienādojumu sistēmu nezināmo pārvietojumu aprēķināšanai mezglu punktos.
5. Zinot lineāros un leņķiskos pārvietojumus mezglu punktos, var aprēķināt šķērsspēku un lieces momentu šajos punktos.

GEM ir aptuvena metode un aprēķinu precizitāti vienkāršāk ir paaugstināt, palielinot GE skaitu, nevis meklējot sarežģītākas funkcijas, kas apraksta elementa deformēto stāvokli.

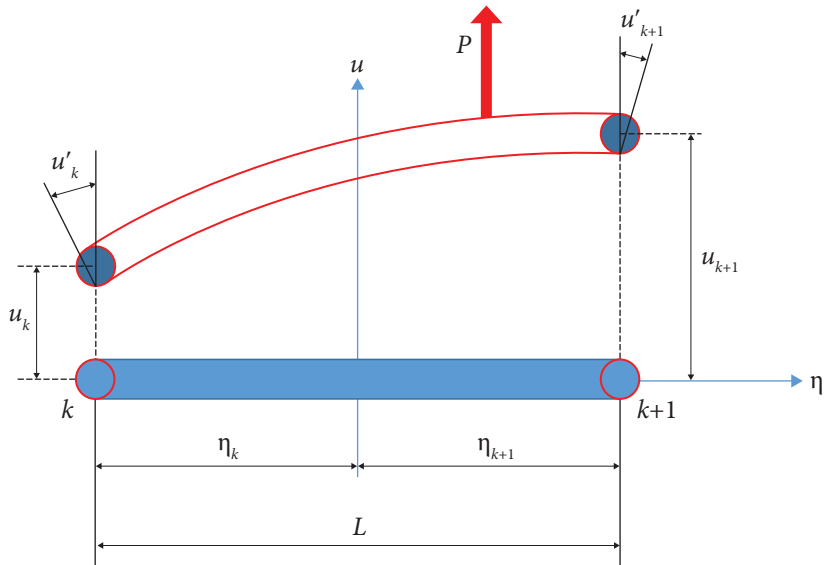
Aplūkojam sijas deformēto un nedeformēto stāvokli. Sija sadalīta četros vienādos elementos, katra GE garums ir L (2.7. att.)

2.8. att. parādīts brīvi izvēlēts GE nedeformētā un deformētā stāvoklī. Koordinātu sistēma izvēlēta elementa centrā. GE galos ir mezglu punkti, kreisā gala punkts apzīmēts ar k , labā – ar $k + 1$. Lineārie pārvietojumi gala punktos ir izlieces u_k un u_{k+1} , leņķiskie pārvietojumi ir šķēlumu pagrieziena leņķi (pārvietojumu atvasinājumi) u_k' un u_{k+1}' .

Uzdevums ir izvēlēties koordinātu funkciju $u(\eta)$, t. i., tādu funkciju, kas pēc iespējas precīzāk aprakstītu GE deformēto stāvokli. Tā kā blakus elementiem ir kopīgs mezglu punkts, tad šī punkta pārvietojumi blakus elementiem būs vienādi.



2.7. att.



2.8. att.

Piemēram: GE kreisajā galā, punktā k (pie $\eta = \eta_k$), lineārais pārvietojums $u = u_k$.
Lai to nodrošinātu, ir jāizpilda robežnoteikumi:

- 1) $u = u_k$ (pie $\eta = \eta_k$);
- 2) $u' = u'_k$ (pie $\eta = \eta_k$);
- 3) $u = u_{k+1}$ (pie $\eta = \eta_{k+1}$);
- 4) $u' = u'_{k+1}$ (pie $\eta = \eta_{k+1}$).

(2.2.)

Lai apmierinātu četrus robežnoteikumus, izvēlas polinomu ar četriem locekļiem:

$$u_1 = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3. \quad (2.3.)$$

Konstantes C_i nosaka no algebrisku vienādojumu sistēmas, ko veido iepriekš minētie robežnoteikumi (2.2.) elementa gala punktos.

(Konstanšu C_i aprēķins ir izlaists.)

Ievietojot aprēķinātās C_i vērtības polinomā (2.2.), iegūst izteiksmi, kas nodrošina robežnoteikumu izpildi, bez tam abstraktās konstantes C_i ir aizstātas ar lielumiem, kuriem ir acīmredzama fizikāla jēga – tie ir pārvietojumi un pagriezienu leņķi mezglu punktos.

Potenciālās enerģijas izteiksme sijas liecē:

$$\Pi = U - H = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta - Pu - Mu'. \quad (2.4.)$$

Minimizējot potenciālo enerģiju vienam GE, potenciālās enerģijas izteiksme jāatvasina pēc gala punktu pārvietojumiem un pagriezienu leņķiem, atvasinājumi jāpielīdzina nullei:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_k} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u'_k} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{k+1}} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u'_{k+1}} = 0 \end{cases} \quad (2.5.)$$

Ir iegūta 4 algebrisku vienādojumu sistēma (2.5.), kuras koeficienti veido tipisko bloku vai tā saukto stinguma matricu $[K]$ vienam GE.

(Matemātiskās darbības to lielā apjoma dēļ ir izlaistas.)

Visu GE tipiskie bloki (stinguma matricas) ir vienādi.

Ja ārējie spēki un momenti pielikti mezglu punktos, tad tie veido brīvo locekļu stabiņu vienādojumu sistēmas labajā pusē. Tos iegūst no atvasinājumiem:

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}, \frac{\partial H}{\partial u'_k}, \frac{\partial H}{\partial u_{k+1}}, \frac{\partial H}{\partial u'_{k+1}}. \quad (2.6.)$$

2.3. SIJAS ELEMENTA TIPISKAIS BLOKS (STINGUMA MATRICA)

$$[K] = \begin{bmatrix} A & B & -A & B \\ A & 2C & -B & C \\ -A & -B & A & -B \\ B & C & -B & 2C \end{bmatrix},$$

$$\text{kur } A = \frac{12}{L^3}, B = \frac{6}{L^2}, C = \frac{2}{L} \tag{2.7}$$

Šis tipiskais bloks (2.7.) ir vienāds visiem elementiem, no šādiem blokiem sastāda vienādojumu sistēmas kreiso pusi. Redzams, ka stinguma matrica ir simetriska, tas ir raksturīgi GEM. Labā puse satur brīvos locekļus, kas ir spēki vai momenti, pielikti mezglu punktos. Brīvo locekļu stabiņš $\{P\}$ veidojas no atvasinājumiem (2.5.):

$$\{P\} = \begin{bmatrix} P_k/EI \\ M_k/EI \\ P_{k+1}/EI \\ M_{k+1}/EI \end{bmatrix} \tag{2.8.}$$

Vienādojumu sistēmas pieraksts vienam GE kompaktā matricu formā:

$$[K]\{u\} = \{P\},$$

kur, $\{u\} = \begin{bmatrix} u_k \\ u'_k \\ u_{k+1} \\ u'_{k+1} \end{bmatrix}$ ir nezināmo lielumu stabiņš.

Vienādojumu sistēmas pieraksts vienam GE kanoniskā formā:

$$\begin{cases} Au_k + Bu'_k - Au_{k+1} + Bu'_{k+1} = \frac{P_k}{EI} \\ Bu_k + 2Cu'_k - Bu_{k+1} + Cu'_{k+1} = \frac{M_k}{EI} \\ -Au_k - Bu'_k + Au_{k+1} - Bu'_{k+1} = \frac{P_{k+1}}{EI} \\ Bu_k + Cu'_k - Bu_{k+1} + 2Cu'_{k+1} = \frac{M_{k+1}}{EI} \end{cases}$$

Visas sijas stinguma matrica liecē sastāv no visu GE matricām (tipiskiem blokiem), kas saliktas atbilstoši GE un mezglu punktu loģiskai numerācijai: 1-2-3.



Ja, piemēram, mezglu punktā k nav pielikts spēks vai moments, tad attiecīgi P_k un M_k ir vienādi ar nulli. Ja spēks vai moments ir pielikts starp mezglu punktiem, tad, palielinot GE skaitu, var panākt tādu stāvokli, ka spēks vai moments ir pielikts mezglu punktā. Līdzīgi ir ar izkliedētu slodzi, ko pie lielāka GE skaita var uzskatīt pieliktu tikai mezglu punktos.

Tā kā sija sastāv no GE, tad sijas vienādojumu sistēma arī sastāv no GE tipiskajiem blokiem.

Visas sijas vienādojumu sistēmu iegūst, “liekot” pēc kārtas pa diagonāli atsevišķos GE tipiskos blokus.

Iegūtā kopīgā vienādojumu sistēma vēl jākorģē atbilstoši sijas balstiem, jo nosakāmie lielumi ir pārvietojumi un daži pārvietojumi balstos ir zināmi (ir vienādi ar nulli) jau pirms uzdevuma risināšanas. Ievietojot šos pārvietojumus vienādojumu sistēmā, atbilstošās rindīņas un stabiņi izzudīs.

Atrisinot algebrisko vienādojumu sistēmu, ir aprēķināti pārvietojumi mezglu punktos un, zinot tos, var aprēķināt lieces momentus un šķērsspēkus jebkurā šķēlumā:

$$M(\eta) = EJ u'' = EI(2C_3 + 6C_4 \eta); \quad (2.9)$$

$$Q(\eta) = EJ u''' = EI6C_4.$$

GEM nav svarīgi, vai sistēma ir statiski noteicama vai nenoteicama.

No vienādojumiem (2.8.) var aprēķināt lieces momentus GE gala punktos:

$$M_k = EI \left(-\frac{6}{L^2} u_k - \frac{4}{L} u'_k + \frac{6}{L^2} u_{k+1} - \frac{2}{L} u'_{k+1} \right); \quad (2.10)$$

$$M_{k+1} = EI \left(\frac{6}{L^2} u_k + \frac{2}{L} u'_k - \frac{6}{L^2} u_{k+1} + \frac{4}{L} u'_{k+1} \right).$$

Šķērsspēks ir konstants visā GE garumā:

$$Q = EI6C_4 = EI \left(\frac{12}{L^3} u_k + \frac{6}{L^2} u'_k - \frac{12}{L^3} u_{k+1} + \frac{6}{L^2} u'_{k+1} \right). \quad (2.11)$$

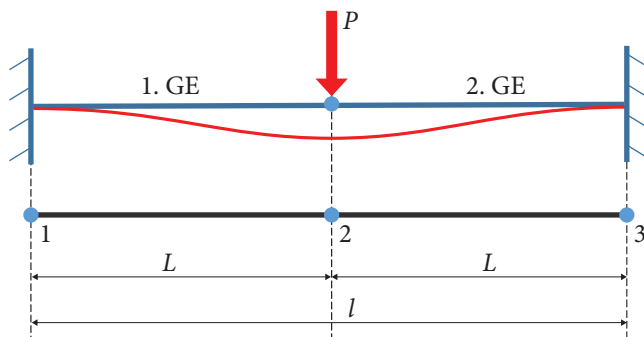
Sijas kopīgās vienādojumu sistēmas salikšana no atsevišķiem blokiem parādīta 2.9. attēlā.

	u_1	u'_1	u_2	u'_2	u_3	u'_3	
$\partial\Pi/\partial u_1$	A	B	-A	B			
$\partial\Pi/\partial u'_1$	B	2C	-B	C			
$\partial\Pi/\partial u_2$	-A	-B	2A	0	-A	B	P_k/EI
$\partial\Pi/\partial u'_2$	B	C	0	4C	-B	C	0
$\partial\Pi/\partial u_3$			-A	-B	A	-B	0
$\partial\Pi/\partial u'_3$			B	C	-B	2C	M_3/EI

2.9. att.

1. PIEMĒRS

Abos galos iespilēta 2 m gara tērauda dubulta T profila sija vidū slogota ar spēku $P=50$ kN (2.10. att.). Noteikt lielāko izlieci sijas vidū u_{max} , kā arī M un Q epīras. Siju dala divos GE ar mezglu punktiem: 1, 2, 3.



2.10. att.

A	B	-A	B				
B	2C	-B	C				
-A	-B	2A	0	-A	B		P_k/EI
B	C	0	4C	-B	C		
		-A	-B	A	-B		
		B	C	-B	2C		

2.11. att.

Kopīgo matricu iegūst, saliekot pa diagonāli abu elementu tipiskos blokus, jo kopīgs ir mezgls 2.

Rindas ir atvasinājumi, stabiņi ir koeficienti pie pārvietojumiem mezglu punktos.

Robežnoteikumi sijai tādi, ka abos balstos, tātad punktos 1 un 3, kā lineārie, tā leņķiskie pārvietojumi ir nulle, bet simetrijas dēļ pagrieziena leņķis punktā 2 ir nulle. Tad no visas vienādojumu sistēmas paliek viens vienādojums:

$$u_{\max} = u_2; (A+A) u_2 = \frac{P}{EJ}; u_2 = u_{\max} = \frac{P}{2AEJ} = \frac{Pl^3}{192EJ} = 0,297 \text{ cm.}$$

Lieces momenti GE gala punktos (2.10.):

$$M_k = EI \left(-\frac{6}{L^2} u_k - \frac{4}{L} u'_k + \frac{6}{L^2} u_{k+1} - \frac{2}{L} u'_{k+1} \right).$$

Šķērsspēks (2.11.):

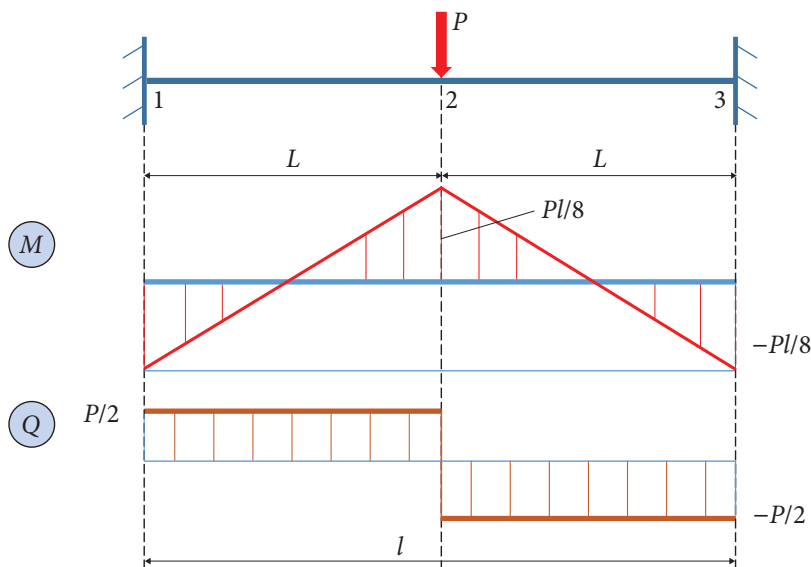
$$Q = EI6C_4 = EI \left(\frac{12}{L^3} u_k + \frac{6}{L^2} u'_k - \frac{12}{L^3} u_{k+1} + \frac{6}{L^2} u'_{k+1} \right)$$

ir konstants visā GE.

Aprēķinot:

$$M_1 = -\frac{Pl}{8} = M_3; M_2 = \frac{Pl}{8}; Q_1 = \frac{P}{L}; Q_2 = -\frac{P}{L}.$$

Lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras parādītas 2.12. attēlā.



2.12. att.

2. PIEMĒRS

1. daļa. Noteikt liecē slogotas sijas dubulta T profila sijas šķērssgriezuma laukuma izmērus un profila Nr. (2.13. att.).

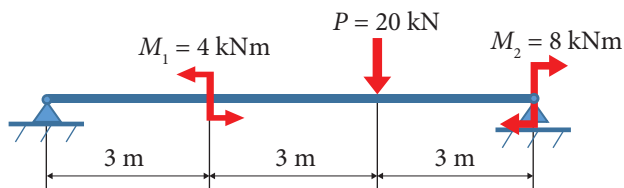
Balstu reakciju aprēķinā izmantot līdzsvara vienādojumus.

Uzzīmēt lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras.

No stiprības noteikuma liecē aprēķināt nepieciešamo sijas pretestības momentu W .

Sijas materiāls – tērauds, kam $[\sigma] = 2 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$ jeb $[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2$.

2. daļa. Tai pašai sijai aprēķināt lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras ar galīgo elementu metodi (GEM) un salīdzināt ar iepriekš iegūtajiem rezultātiem.



2.13. att.

1. daļas atrisinājums

no līdzsvara vienādojuma (2.14. att.) $\sum M_{Ai} = 0$ jeb $M_1 - Pl_p + R_B l_{RB} - M_2 = 0$;

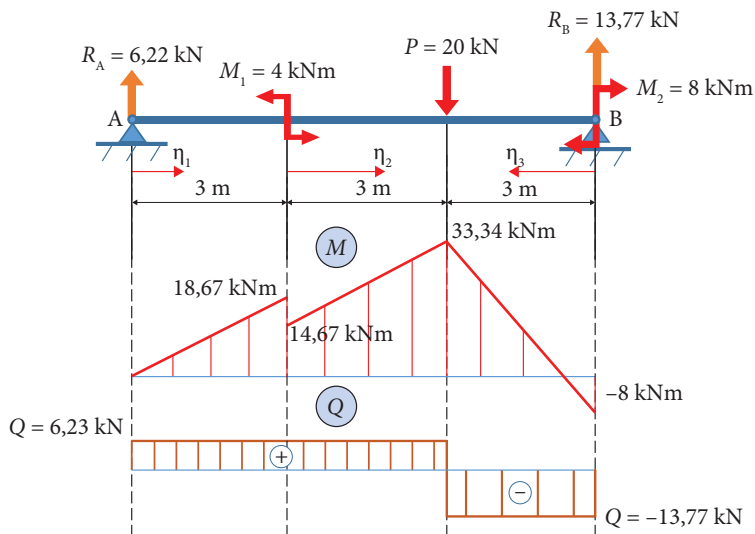
$4 - 20 \cdot 6 + 9R_B - 8 = 0$, aprēķina $R_B = 13,77 \text{ kN}$.

No vienādojuma $\sum M_{Bi} = 0$ jeb $-R_A l_{RA} + M_1 + Pl_p - M_2 = 0$ aprēķina $R_A = 6,22 \text{ kN}$.

1. posms $Q = R_A = 6,22 \text{ kN}$, $M = R_A \eta_1 = 6,22 \eta_1$.

2. posms $Q = R_A = 6,22 \text{ kN}$, $M = R_A (3 + \eta_2) - M_1 = 14,66 + 6,22 \eta_2$.

3. posms $Q = -R_B = -13,77 \text{ kN}$, $M = R_B \eta_3 - M_2 = 13,77 \eta_3 - 8$.



2.14. att.

Dubulta T profila sijas Nr. nosaka no stiprības noteikuma liecē:

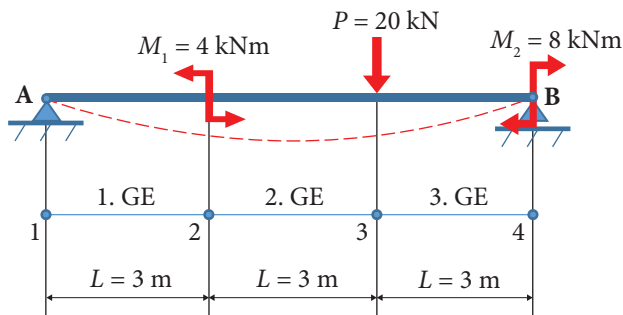
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} < [\sigma];$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{33,34 \text{ kNm} \cdot \text{m}^2}{2 \times 10^5 \text{ kN}} = 166,7 \text{ cm}^3.$$

Tabulā tuvākais profils ir Nr. 20, kam $W_x = 184 \text{ cm}^3$.

2. daļas atrisinājums

Aprēķināt lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras ar galīgo elementu metodi (GEM).



2.15. att.

Lai ar GEM noteiktu sijas lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras, sija jāsadala vienādos galīgos elementos GE (2.15. att.).

Siju sadala trīs elementos, katra elementa garums ir $L = 3 \text{ m}$.

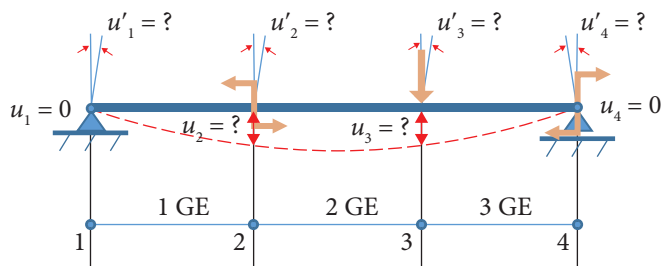
Mezglu punkti ir 1, 2, 3, 4.

Pēc sijas nostiprinājuma veida un ārējās slodzes ar pārtrauktu līniju parādīts iespējamais sijas deformētais stāvoklis.

Daudzu lielu programmu *ANSYS*, *ROBOT*, *ADINA*, *LIRA* u. c. pamatā ir GEM. Lai strādātu ar šīm programmām, ir jāveic apmācība.

Šajā piemērā vienkāršā lieces uzdevumā var izsekot tā risināšanas gaitai un GEM galvenajiem etapiem un pārskatāmā veidā iegūt rezultātu – M un Q epīras. Risinājuma pareizību var viegli pārbaudīt, salīdzinot ar epīrām, kas 1. daļā iegūtas ar līdzsvara vienādojumu palīdzību.

Pēc sijas nostiprinājuma veida un ārējās slodzes var parādīt iespējamo deformēto stāvokli (2.16. att.). Ir redzami lineārie pārvietojumi u un leņķiskie pārvietojumi u' mezglu punktos 1, 2, 3, 4.



2.16. att.

Robežnoteikumi konkrētajā uzdevumā ir tie pārvietojumi, kuri ir redzami no aprēķina shēmas, tātad ir zināmi pirms uzdevuma risināšanas – pārvietojumu balstos nav, tātad tie ir zināmi ($u_1 = 0, u_4 = 0$).

Nezināmie pārvietojumi ir: $u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3, u'_4$.

Šo nezināmo aprēķināšanai jāatrisina GEM vienādojumu sistēma, kuru sastāda no tipiskajiem blokiem (stinguma matricām).

Robežnoteikumi $u_1 = 0, u_4 = 0$ samazina kopīgo vienādojumu skaitu par 2 (jāizsvītro divas rindiņas un divi atbilstošie stabiņi).

Ja visa sija sadalīta trijos elementos, tad kopīgo vienādojumu sistēmu veido trīs vienādi tipiskie bloki (2.17. att.).

	$u_1 = 0$	u'_1	u_2	u'_2	u_3	u'_3	$u_4 = 0$	u'_4	
$\partial\Pi/\partial u_1$									
$\partial\Pi/\partial u'_1$		2C	-B	C		0		0	0
$\partial\Pi/\partial u_2$		-B	2A	0	-A	B		0	0
$\partial\Pi/\partial u'_2$		C	0	4C	-B	C		0	$-M_1/EI$
$\partial\Pi/\partial u_3$			-A	-B	2A	0		B	$-P/EI$
$\partial\Pi/\partial u'_3$		0	B	C	0	4C		C	0
$\partial\Pi/\partial u_4$									
$\partial\Pi/\partial u'_4$		0	0	0	B	C		2C	M_2/EI

2.17. att.

Brīvo locekļu stabiņu veido spēki un momenti, kas pielikti mezglu punktos:

Moments M_1 pielikts punktā 2, tas ir vienādojuma, kas iegūts atvasinot potenciālo enerģiju pēc u'_2 ($\partial\Pi/\partial u'_2 = 0$), brīvais loceklis M_1/EI ir pozitīvs, jo darbojas pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam.

Spēks P pielikts punktā 3, tas ir vienādojuma, kas iegūts atvasinot potenciālo enerģiju pēc u_3 ($\partial\Pi/\partial u_3 = 0$), brīvais loceklis $-P/EI$, kas ir negatīvs, jo vērsts uz leju.

Moments M_2 pielikts punktā 4, tas ir vienādojuma, kas iegūts, atvasinot potenciālo enerģiju pēc u'_4 ($\partial\Pi/\partial u'_4 = 0$), brīvais loceklis $-M_2/E$, kas ir negatīvs, jo darbojas pulksteņa rādītāju kustības virzienā.

Vienādojumu sistēmas atrisināšana piemērā parādītajai sijai

Iegūtā vienādojumu sistēma ir lineāra sešu algebrisko vienādojumu sistēma, kuras pieraksts kanoniskā formā ir:

$$\begin{cases} 2Cu'_1 - Bu_2 + Cu'_2 = 0 \\ -Bu'_1 + 2Au_2 - Au_3 + Bu'_3 = 0 \\ Cu'_1 + 4Cu'_2 - Bu_3 + Cu'_3 = \frac{M_1}{EI} \\ -Au_2 - Bu'_2 + 2Au_3 + Bu'_4 = -\frac{P}{EI} \\ Bu_2 + Cu'_2 + 4Cu'_3 + Cu'_4 = 0 \\ Bu_3 + Cu'_3 + 2Cu'_4 = -\frac{M_2}{EI} \end{cases} \quad (2.12.)$$

Tipiskā bloka koeficientu un ārējās slodzes skaitliskās vērtības ir:

$$A = \frac{12}{L^3} = \frac{12}{3^3} = 0,44;$$

$$B = \frac{6}{L^2} = \frac{6}{3^2} = 0,66;$$

$$C = \frac{2}{L} = \frac{2}{3} = 0,66;$$

$$M_1 = 4 \text{ kNm}, P = 20 \text{ kN}, M_2 = 8 \text{ kNm}.$$

Tā kā sijas šķērsriezuma laukums nav zināms, stingumu pieņem $EI = 1$. Sistēmas atrisinājums (2.13.) iegūts, izmantojot *Mathcad* programmu:

$$\text{Find}(u_{11}, u_2, u_{21}, u_3, u_{31}, u_{41}) = \begin{pmatrix} -66,667 \\ -171,717 \\ -38,384 \\ -191,919 \\ 34,343 \\ 72,727 \end{pmatrix} \quad (2.13.)$$

Iegūtie rezultāti ir pārvietojumi un pagrieziena leņķi mezglu punktos:

$$u'_1 = u_{11} = -66,67;$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= u2 = -171,717; \\
 u'_2 &= u21 = -38,384; \\
 u_3 &= u3 = -191,919; \\
 u'_3 &= u31 = 34,343; \\
 u'_4 &= u41 = 72,727.
 \end{aligned}$$

Pēc iegūtajiem rezultātiem un zīmēm var spriest par to pareizību.

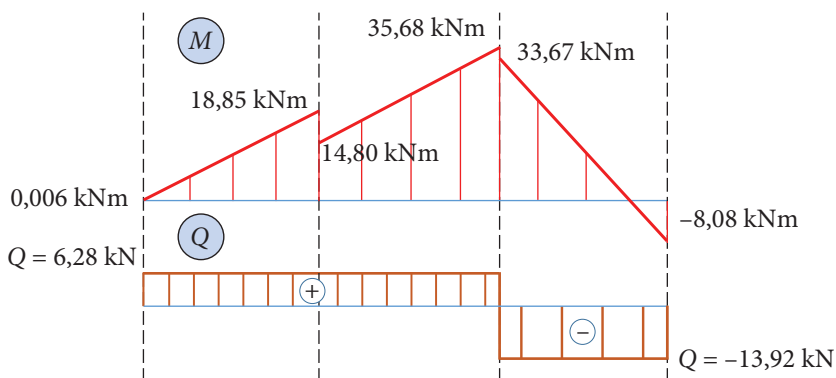
Redzams, ka pārvietojums spēka pielikšanas vietā – punktā 3 – ir lielāks nekā punktā 2. Pagrieziena lenķi punktos 1 un 2 ir ar pretējām zīmēm nekā punktos 3 un 4.

Lieces momentu M vērtības mezglu punktos aprēķina pēc izteiksmēm (2.10). Šķērsspēku Q aprēķina, izmantojot (2.11.)

Lieces momenta un šķērsspēka epīru salīdzināšana

Lieces momenta M un šķērsspēka Q epīras, kas iegūtas 1. daļā, var uzskatīt par precīzu rezultātu, jo aprēķinu metode ir precīza.

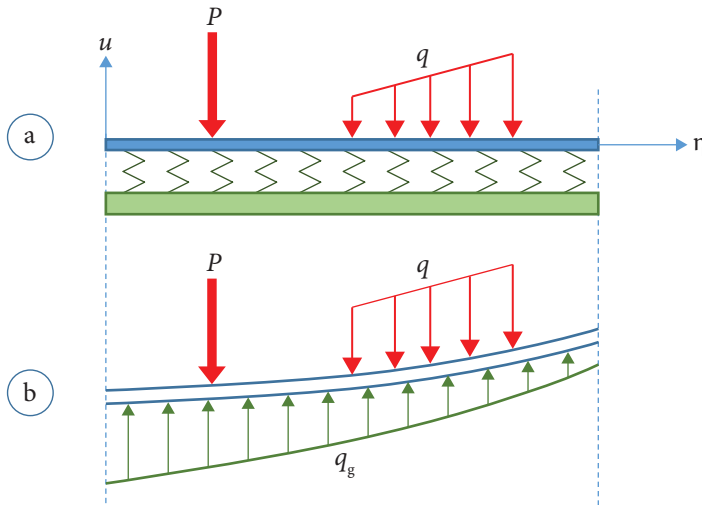
Ar GEM iegūtie rezultāti (2.18. att.) atšķiras no precīzajiem (sk. 2.14. att.), jo GEM ir aptuvena aprēķinu metode. Atšķirības ir nelielas un iekļaujas pieļaujamās kļūdas robežās, kaut arī izmantoto GE skaits ir tikai 3. Precizitāti var palielināt, palielinot GE skaitu.



2.18. att.

GE stinguma matrica (tipiskais bloks) ir vienāda visiem elementiem, izteiksmes lieces momenta un šķērsspēka aprēķinam arī ir vienādas visiem GE. Tas atbilstoši programmu sastādīšanu darbam ar datoru.

3. SIJA UZ ELASTĪGA PAMATA



3.1. att.

Ja, piemēram, sija visā garumā novietota uz zemes, tātad nav balstīta uz atsevišķiem balstiem, tad var uzskatīt, ka tā ir novietota uz atsperēm, kas atrodas tuvu cita citai un slogota ar ārēju slodzi (3.1. att. a). Tādā gadījumā no atsperu puses rodas reakcijas, kas proporcionālas sijas vietējai izliecei. Tā kā attālums starp atsperēm ir neliels, tad reakcijas var attēlot kā izkļiedētu slodzi q_g , kas proporcionāla izliecei u . (3.1. att. b). Visvienkāršākais modelis, ko iegūst, izmantojot Vinklera hipotēzi, ir tieši proporcionāla sakarība starp lielumiem q_g un u :

$$q_g = -\beta u(\eta),$$

kur β ir proporcionalitātes koeficients.

Zīme “mīnuss”, jo reakcijas ir pretējas izliecei.

Balstu reakcijas nevar aprēķināt, jo nav pašu balstu, bet sija atrodas uz elastīga pamata. Praksē šāda aprēķina shēma tiek plaši izmantota daudzu konstrukciju analīzei. To sekmīgi var izmantot, ja sija balstīta uz daudziem elastīgiem balstiem, kā arī ūdenī peldošai sijai. Ja sija balstīta uz grunts, tad Vinklera hipotēze sevi attaisno tikai pirmajā slogojumā un to nevar lietot, siju atslogojot.

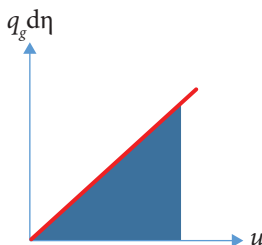
GEM lietošana sijai uz elastīga pamata

Tāpat kā parastajā liecē, sija uz elastīga pamata iegūst lieces enerģiju U un ārējie spēki zaudē enerģiju H :

$$\Pi = U - H = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta - Pu - Mu', \quad (1.2. a)$$

bet sistēma no elastīgā pamata deformācijas iegūst papildu enerģiju H^* :

$$H^* = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} q_g u \, d\eta = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \beta u^2 \, d\eta.$$



3.2. att.

Pirms integrāļa $1/2$ ir tāpēc, ka elastīgā pamata raksturliktne pieņemta lineāra (3.2. att.).

Tad viena GE potenciālā enerģija atšķirsies tikai par H^* :

$$\Pi_1 = U - H + H^* = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 \, d\eta - P_i u_i - M_j u_j + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \beta u^2 \, d\eta.$$

Sijas izlieces aptuvenā izteiksme

$$u_1 = C_1 + C_2 \eta + C_3 \eta^2 + C_4 \eta^3$$

ir lietojama arī šajā gadījumā, kad sija ir novietota uz elastīga pamata.

Pēc potenciālās enerģijas Π_1 minimizēšanas vienam elementam iegūst vienādojumu sistēmu, kuras matrica (tipiskais bloks) ir:

$A + \frac{13}{35} L q_g$	$B + \frac{11}{210} L^2 q_g$	$-A + \frac{9}{10} L q_g$	$B - \frac{13}{420} L^2 q_g$	= $[K]_1 - [M]_1$.
$B + \frac{11}{210} L^2 q_g$	$2C + \frac{1}{105} L^3 q_g$	$-B + \frac{13}{420} L^2 q_g$	$C - \frac{1}{140} L^3 q_g$	
$-A + \frac{9}{10} L q_g$	$-B + \frac{13}{420} L^2 q_g$	$A + \frac{13}{35} L q_g$	$-B - \frac{11}{210} L^2 q_g$	
$B - \frac{13}{420} L^2 q_g$	$C - \frac{1}{140} L^3 q_g$	$-B - \frac{11}{210} L^2 q_g$	$2C + \frac{1}{105} L^3 q_g$	

Brīvo locekļu stabiņš nemainās.

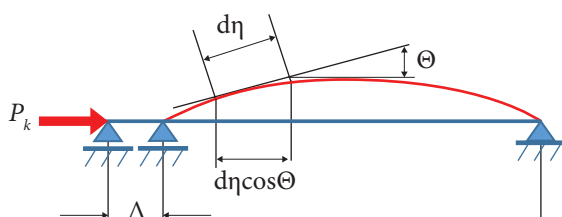
Matrica $[M]_1$ ir matrica, kas raksturīga sijai uz elastīga pamata un papildina vienkāršas sijas lieci.

No iepriekšējās matricas redzams, ka

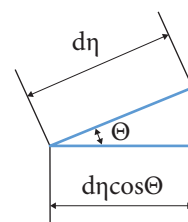
	$-\frac{13}{35}L$	$-\frac{11}{210}L^2$	$-\frac{9}{70}L$	$\frac{13}{420}L^2$
	$-\frac{11}{210}L^2$	$-\frac{1}{105}L^3$	$-\frac{13}{420}L^2$	$\frac{1}{140}L^3$
	$-\frac{9}{70}L$	$-\frac{13}{420}L^2$	$-\frac{13}{35}L$	$\frac{11}{210}L^2$
$[M]_1 = q_g$	$\frac{13}{420}L^2$	$\frac{1}{140}L^3$	$\frac{11}{210}L^2$	$-\frac{1}{105}L^3$

4. GALĪGO ELEMENTU METODES IZMANTOŠANA ĻODZES APRĒĶINOS

Ļodzēs gadījumā deformācijas ir tādas pašas kā liecē. Stieņa kopīgā potenciālā enerģija sastāv no stienī uzkrātās lieces enerģijas un ārējo spēku (t. i., spiedes spēka P) zaudētās enerģijas. Ļodzē spiedes spēks P zaudē enerģiju $P\Delta$, kad sistēma no taisna, nedeformēta stāvokļa pāriet deformētā, un Δ ir starpība starp taisnā stieņa garumu un liektā stieņa projekcijas garumu (4.1. att.).



4.1. att.



4.2. att.

Pārvietojuma Δ aprēķināšana

Bezglā maza elementa $d\eta$ projekcija ir $d\eta \cos \Theta$ (4.2. att.). Tā kā šķēluma pagrieziena leņķis Θ ir mazs lielums, tad $\cos \Theta = 1 - \Theta^2/2!$ (rindas $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$ pirmie divi locekļi).

Projekcija ir:

$$d\eta \cos \Theta = \left(1 - \frac{\Theta^2}{2!}\right) d\eta = \left[1 - \frac{1}{2}(u')^2\right] d\eta.$$

Nedeformētā stāvoklī šis garums ir $d\eta$. Pārvietojums $d\Delta$ ir nedeformētā elementa un deformētā elementa garumu starpība:

$$d\Delta = d\eta - d\eta \cos \Theta = d\eta - \left[1 - \frac{1}{2}(u')^2\right] d\eta = \frac{1}{2}(u')^2 d\eta.$$

Viena GE starpību Δ_l nosaka, summējot (integrējot) pa elementa garumu:

$$\Delta_l = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2}(u')^2 d\eta.$$

Spiedes spēka P padarītais darbs:

$$H_p = P\Delta_l = P \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2}(u')^2 d\eta.$$

Veicot tādas pašas darbības kā lieces potenciālās enerģijas minimizēšanā ar tādu pašu aproksimējošo funkciju, iegūst matricu (tipisko bloku) vienam GE kā liecē (2.7.), bet ar papildu locekļiem no spiedes spēka P – stienā garenvirzienā (4.1.).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 A - \frac{6P}{5EI} & B - \frac{P}{10EI} & -A + \frac{6P}{5EI} & B - \frac{P}{10EI} \\
 \hline
 B - \frac{P}{10EI} & 2C - \frac{2PL}{15EI} & -B + \frac{P}{10EI} & C + \frac{PL}{30EI} \\
 \hline
 -A + \frac{6P}{5EI} & -B + \frac{P}{10EI} & A - \frac{6P}{5EI} & -B + \frac{P}{10EI} \\
 \hline
 B - \frac{P}{10EI} & C + \frac{PL}{30EI} & -B + \frac{P}{10EI} & 2C - \frac{2PL}{15EI} \\
 \hline
 \end{array} = [K]_1 + [S]_1 \quad (4.1.)$$

Redzams, ka ļodzē tipisko bloku papildina locekļi no papildu spiedes spēka P . Brīvie locekļi ir nulles.

Spēks P ir ne tikai l -tajam elementam pieliktais spiedes spēks, bet kopīgais spēks, kas darbojas vienā pusē šķēlumam.

Ļodzē darbojas tikai slodze ass virzienā, jo $P_i=0$, $M_j=0$, $q=0$ un pilnā potenciālā enerģija ir:

$$\Pi = U_M - P\Delta_l = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta - P \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2}(u')^2 d\eta.$$

Minimizējot, iegūsim homogēnu algebrisku vienādojumu sistēmu, kurai visi brīvie locekļi ir nulles. Šādai sistēmai “nenulles” atrisinājums var būt tikai tad, ja sistēmas determinants D vienāds ar nulli, jo:

$$u_i = \frac{D_i}{D} = \frac{0}{0} \neq 0.$$

Vienādojumu sistēmu, ko iegūst saliekot tipiskos blokus pa diagonāli, nerisina, bet no tās determinanta ($D = 0$) atrod kritiskā spēka vērtību P_k , tipiskajā blokā nomainot P ar P_k .

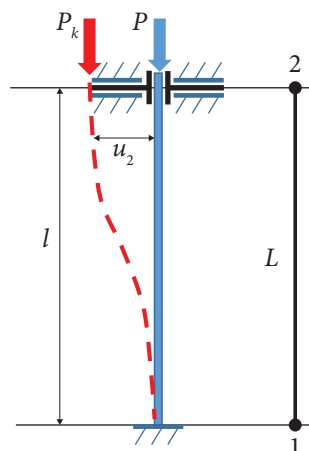
1. PIEMĒRS

Vertikālam stienim apakšējais gals nostiprināts iespilējumā, augšējā gala balsts veidots tā, ka tas var pārvietoties uz sāniem, bet nevar pagriezties. Stienis slogots ar augšējā galā pieliktu spiedes spēku P (4.3. att.).

Noteikt kritisko spēku lodzē slogotam stienim.

Pieņemsim, ka viss stienis sastāv no viena galīgā elementa, kura garums $L=l$.

Lai sastādītu homogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu, izmanto tipisko bloku (4.1.).



4.3. att.

Lai atrisinājums būtu vienkāršāks un pārskatāmāks, ir izvēlēts tikai viens GE, tad arī kopīgā vienādojumu sistēma sastāv tikai no viena tipiskā bloka (4.1.). Vienādojumu sistēma parādīta shematiski, zilās rindiņas un stabiņi jāatmet (tie ir robežnoteikumi), paliek tikai sarkanā rūtiņa:

$$([K]_1 + [s]_1)\{u\} = \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \color{red}\blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} = \begin{matrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \color{red}\blacksquare \\ \blacksquare \end{matrix}$$

Robežnoteikumi ir atkarīgi no stieņa nostiprinājuma veida. Apakšējā balsatā, punktā 1, stienis ir iespilēts, tātad tur pārvietojums un pagrieziens ir nulle, t. i., $u_1=0$ un $u'_1=0$. Augšējā balstā, punktā 2, pagrieziens ir nulle, t. i., $u'_2=0$. Tātad no visiem četriem mezglu punktu pārvietojumiem nezinašs un meklējams lielums ir tikai pārvietojums punktā 2, t. i., u_2 .

Ievērojot robežnoteikumus, no visiem vienādojumiem paliek tikai viens:

$$\color{red}\blacksquare = 0 \quad \text{jeb} \quad \left(\frac{12}{L^3} - \frac{6P_k}{5EIL} \right) u_2 = 0.$$

Vienādojumu sistēmai “nenulles” atrisinājums iespējams tad, ja sistēmas determinants $D_s=0$.

Šajā gadījumā vienādojumu sistēmas vietā ir tikai viens vienādojums.

Tā kā u_2 nav vienāds ar nulli, tad atliek, ka

$$\frac{12}{L^3} - \frac{6P_k}{5EIL} = 0.$$

Izsaka P_k :

$$P_k = \frac{12 \cdot 5EIL}{6L^3} = \frac{10EI}{L^2}.$$

Precīzais rezultāts:

$$P_k = \frac{9,8696EI}{L^2}.$$

2. PIEMĒRS

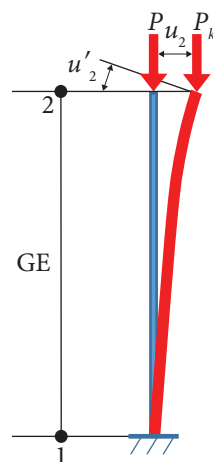
Vertikāls stienis nostiprināts iespīlējumā, bet brīvajā galā slogots ar spiedes spēku garenvirzienā, stieņa stingums liecē EI (4.4. att.).

Noteikt kritisko spēku P_k ar GEM.

Lai vienkāršotu risinājumu, pieņem vienu GE visā stieņa garumā.

Iespīlējumā pārvietoējuma un pagrieziņa leņķa nav, tāpēc robežnoteikumi ir: $u_1 = 0$ un $u'_1 = 0$.

Izmantojot tipisko bloku (4.1.), jāatmet pirmās divas rindas un stabiņi. Ievērojot robežnoteikumus, no tipiskā bloka četriem vienādojumiem paliek tikai divu vienādojumu sistēma:



4.4. att.

		u_2	u'_2	
		$A - \frac{6P}{5EIL}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	0
		$-B + \frac{P}{10EI}$	$2C - \frac{2PL}{15EI}$	0

Vienādojumu sistēma:

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{6P}{5EIL} \right) u_2 - \left(B + \frac{P}{10EI} \right) u_2' &= 0 \\ \left(-B + \frac{P}{10EI} \right) u_2 + \left(2C - \frac{2PL}{15EI} \right) u_2' &= 0 \end{aligned}$$

Lai aprēķinātu kritisko spēku, šīs sistēmas determinants jāpielīdzina 0 ($D=0$) un no iegūtā vienādojuma jāizvēlas mazākā sakne, t. i., P mazākā vērtība, jo sistēma zaudēs stabilitāti jau pie mazākās P vērtības, kas arī ir P_k .

Ievietojot lielumus A, B, C , sistēmas determinants ($D=0$) ir:

$$\begin{vmatrix} \frac{12}{L^3} - \frac{6P}{5EIL} & -\frac{6}{L^2} + \frac{P}{10EI} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{P}{10EI} & \frac{4}{L} - \frac{2PL}{15EI} \end{vmatrix} = 0.$$

Tas ir kvadrātvienādojums attiecībā pret $P = P_k$:

$$\frac{0,15}{(EI)^2} P_k^2 - \frac{4,4}{EIL^2} P_k + \frac{12}{L^4} = 0.$$

Šī kvadrātvienādojuma saknes ir: $P_1 = 26,3EI/L^2$ un $P_2 = 3EI/L^2$.

Tātad kritiskais spēks ir mazākā vērtība: $P_k = 3EI/L^2$.

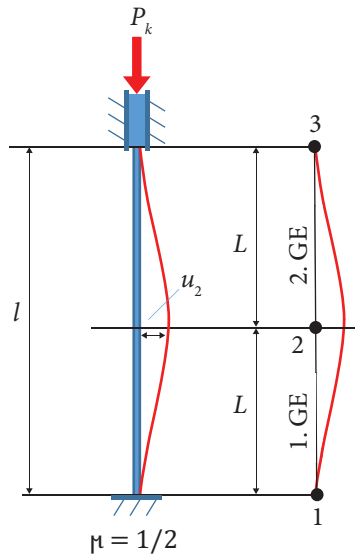
Precīzā vērtība pēc Eilera formulas ir:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_x}{l_r^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2} \approx \frac{2,5EI}{L^2}.$$

3. PIEMĒRS

Garš stienis slogots ar vienā galā pieliktu koncentrētu spiedes spēku.

Stieņa gali nostiprināti tā, ka nevar pagriezties. Stieņa garums l , stingums liecē EI (4.5. att.).



4.5. att.

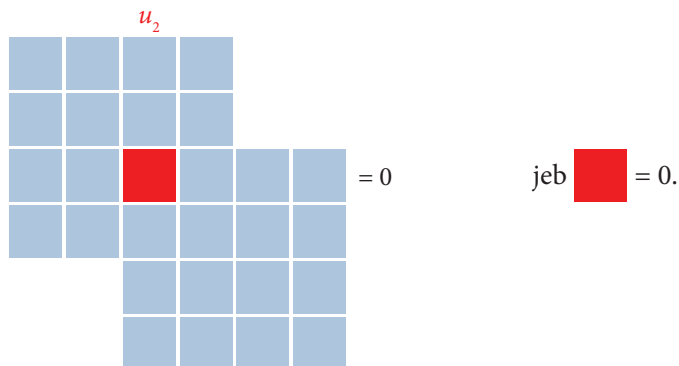
Ar GEM noteikt kritisko spiedes spēku P_k , pie kura stienis zaudēs stabilitāti.

Stieni sadala divos GE. Mezglu punkti 1, 2, 3.

Robežnoteikumi ir tie pārvietojumi, kurus var noteikt pirms uzdevuma risināšanas. Ir jāuzzīmē iespējamais deformētais stāvoklis un jāskatās acīm redzami pārvietojumi. Šajā uzdevumā abos stieņa galos (punktos 1 un 3) ir iespīlējumi, tātad tajos pārvietojumu nav: $u_1 = 0$, $u'_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u'_3 = 0$. Stieņa izliece ir simetriska pret punktu 2, tādēļ šajā punktā pagrieziņa leņķis ir nulle: $u'_2 = 0$. Nosakāmais lielums ir tikai izliece viduspunktā u_2 .

Tā kā stienis ir sadalīts divos galīgos elementos, tad vienādojumu sistēmu arī sastāda no diviem tipiskiem blokiem (4.1.), kurus saliek pa diagonāli.

Ievērojot robežnoteikumus, paliek viens vienādojums (tā ir sarkanā rūtiņa vienādojumu sistēmas shematiskajā attēlā).



Uzrakstot vienādojumu:

$$2 \left(A - \frac{6P_k}{5EIL} \right) u_2 = 0.$$

Divu lielumu reizinājums ir vienāds ar nulli, ja viens no šiem lielumiem ir nulle.

Tā kā u_2 nav nulle, tad

$$\left(A - \frac{6P_k}{5EIL} \right) = 0 \text{ jeb}$$

$$\frac{12}{L^3} = \frac{6P_k}{5EIL} \text{ un } P_k = \frac{10EI}{L^2} = \frac{10EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{40EI}{l^2}.$$

Precīzā vērtība pēc Eilera formulas ir:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_x}{l_r^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{9,86 EI_x}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} \approx \frac{39,43 EI}{l^2}.$$

Šādai sloģojuma shēmai koeficients μ Eilera formulā ir

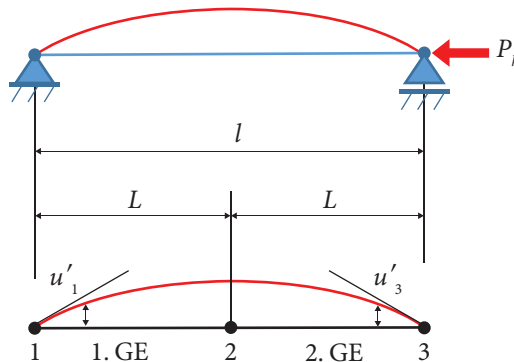
$$\mu = \frac{1}{2}.$$

4. PIEMĒRS

Stienis nostiprināts šarnīros un slogots ar spiedes spēku. Stienis garums l , kas ir daudz lielāks par stienis šķērsizmēriem. Stienis stingums liecē ir EI (4.6. att.).

Šādi nostiprināts lodzē slogots stienis tiek uzskatīts par pamata variantu, kam koeficients $\mu = 1$. Stienis pašsvars netiek ņemts vērā.

Ar GEM noteikt P_k .



4.6. att.

Stienis sadala divos GE. Mezglu punkti – 1, 2, 3.

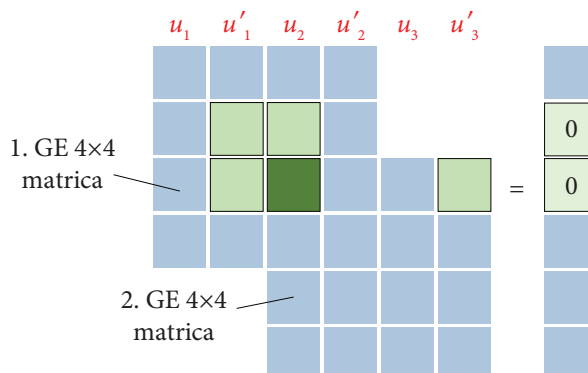
Robežnoteikumi:

$u_1 = 0, u_3 = 0$, jo balstos pārvietojumu nav,

$u'_1 = -u'_3$, jo simetrijas dēļ pagrieziņa leņķi balstos ir vienādi,

$u'_2 = 0$, jo pagrieziņa leņķis ir nulle, tāpēc ka izliece ir simetriska.

Shematiski sastādot vienādojumu sistēmu no tipiskajiem blokiem, iegūst divu vienādojumu sistēmu:



Pārvietojumi u_1 un u_2 ir jānosaka no vienādojumu sistēmas, kas sastāv no otrā un trešā vienādojuma.

Vienādojumu sistēma pēc robežnoteikumu ievērošanas:

$$\begin{cases} \left(2\left(\frac{2}{L}\right) - \frac{4P_k L}{15EI}\right)u_1' + \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{P_k}{10EI}\right)u_2 = 0 \\ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{P_k}{10EI}\right)u_1' + 2\left(\frac{12}{L^3} - \frac{3P_k}{5EIL}\right)u_2 - \left(\frac{6}{L^2} - \frac{P_k}{10EI}\right)u_1' = 0 \end{cases}$$

Lai aprēķinātu P_k , jāatrisina vienādojums: $D=0$.

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{L} - \frac{4P_k L}{15EI} & -\frac{6}{L^2} + \frac{P_k}{10EI} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{P_k}{10EI} & \frac{24}{L^3} - \frac{6P_k}{5EIL} \end{vmatrix} = 0.$$

Kvadrātvienādojums:

$$\frac{0,34}{(EI)^2} P_k^2 - \frac{12,4}{EIL^2} P_k + \frac{24}{L^4} = 0.$$

Kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ atrisinājums:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kvadrātvienādojuma $D=0$ atrisinājums ($L=l/2$):

$$P_{k1} = \frac{137,64EI}{l^2}, P_{k2} = \frac{8,24EI}{l^2}.$$

Jāizvēlas mazākā vērtība P_{k2} , pie kuras sistēma zaudē stabilitāti.

Precīzā vērtība pēc Eilera formulas ir:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_x}{l_r^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \approx \frac{9,86EI}{L^2}.$$

5. GALĪGO ELEMENTU METODES LIETOJUMS SIJAS SVĀRSTĪBU APRĒĶINOS

Ja sija slogota ar statisku slodzi, tad aprēķinos izmanto potenciālās enerģijas minimuma principu. Dinamiskos uzdevumos jāņem vērā arī kinētiskā enerģija.

Tādēļ sijas svārstību aprēķinos izmanto vispārīgu mehānikas principu – Hamiltona principu, kas apgalvo, ka integrālim

$$L = \int_0^t \left[\int_0^l (\Pi - K) d\eta - P\Delta \right] dt$$

ir stacionāra vērtība tikai tad, ja kustība atbilst patiesajai.

Šeit Π – potenciālā enerģija ($\Pi = U - H$), K – kinētiskā enerģija, t – laiks.

Jāminimizē funkcionālis:

$$L = \int_0^t \left[\int_0^l (\Pi - K) d\eta - P\Delta \right] dt = \int_0^t \left[\int_0^l (U - H - K) d\eta \right] dt.$$

Dažādu konstrukciju aprēķinu shēmas bieži var veidot kā koncentrētas masas, kas nostiprinātas uz sijas. Dinamikas uzdevumos tiek aplūkotas svārstību sistēmas, kas sastāv no sijas (izkļiedēta masa) un koncentrētām masām.

Sija ir sadalīta galīgos elementos un to galos atrodas koncentrēta masa: m_k, m_{k+1} , un var tikt pielikti ierosinoši harmoniski spēki:

$$P_k(t) = P_k \sin \omega t, P_{k+1}(t) = P_{k+1} \sin \omega t$$

un momenti:

$$M_k(t) = M_k \sin \omega t, M_{k+1}(t) = M_{k+1} \sin \omega t.$$

Sijas svārstību gadījumā:

$$U = \frac{1}{2} EI (u'')^2,$$

$$H = P_k(t)u_k + M_k(t)u'_k + P_{k+1}(t)u_{k+1} + M_{k+1}(t)u'_{k+1}.$$

Kinētiskā enerģija sastāv no izkļiedētās masas K_m un koncentrēto masu K_{mk}, K_{mk+1} enerģiju summas:

$$K = K_m + K_{mk} + K_{mk+1}.$$

Harmonisku svārstību ierosmes gadījumā arī atrisinājumu meklē kā harmonisku funkciju: $u(t) = u \sin \omega t$, kur u ir tā pati izlieces funkcija, kas tika izmantota

statiskā sloojumā. Ievietojot izvēlētās funkcijas funkcionāli L un izpildot nepieciešamās darbības (kas šeit ir izlaistas), iegūst funkcionāli vienam GE:

$$L_e = \frac{1}{2} \int EI(u'')^2 d\eta - P_k u_k - M_k u'_k - P_{k+1} u_{k+1} - M_{k+1} u'_{k+1} - \frac{1}{2} \gamma FL \omega^2 \int u^2 d\eta - \frac{1}{2} m_k u_k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_k (u'_k)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_{k+1} u_{k+1}^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_{k+1} (u'_{k+1})^2 \omega^2. \quad (5.1.)$$

Minimizējot šo izteiksmi (5.1.), no pirmā saskaitāmā iegūst jau zināmo matricu statiskā liecē $[K]_e$ (2.7).

$$[K]_e = \begin{bmatrix} A & B & -A & B \\ B & 2C & -B & C \\ -A & -B & A & -B \\ B & C & -B & 2C \end{bmatrix}$$

$$\text{kur } A = \frac{12EI}{L^3}, B = \frac{6EI}{L^2}, C = \frac{2EI}{L}.$$

L – galīgā elementa garums.

Nākamie četri locekļi pēc minimizēšanas veido brīvo locekļu stabiņu

$$\{P\}_e = \begin{bmatrix} P_k \\ M_k \\ P_{k+1} \\ M_{k+1} \end{bmatrix}$$

Izteiksmē (5.1.) integrālis $1/2 \gamma FL \omega^2 \int u^2 d\eta$ satur u^2 . Šāds integrālis jau bija sijai uz elastīga pamata liecē. Nomainot $q_g = \gamma F \omega^2$, var iegūt standarta bloku (matricu) (5.2.), kas ievēro sijas elementa izkļiedēto masu:

$$[M]_e = \gamma F \omega^2 \begin{bmatrix} -\frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 & -\frac{9}{70}L & \frac{13}{420}L^2 \\ -\frac{11}{210}L^2 & -\frac{1}{105}L^3 & -\frac{13}{420}L^2 & \frac{1}{140}L^3 \\ -\frac{9}{70}L & -\frac{13}{420}L^2 & -\frac{13}{35}L & \frac{11}{210}L^2 \\ \frac{13}{420}L^2 & \frac{1}{140}L^3 & \frac{11}{210}L^2 & -\frac{1}{105}L^3 \end{bmatrix} \quad (5.2.)$$

Apzīmējumi:

L – sijas galīgā elementa garums;

γ – sijas materiāla blīvums;

F – sijas šķērsriezuma laukums;

ω – uzspiedējspēka frekvence.

Pēdējie četri saskaitāmie pēc (5.1.) minimizēšanas veido diagonālu matricu – standarta bloku $[I]_e$ (5.3.), kurā ņem vērā kinētisko enerģiju no koncentrētām masām GE galos m_j un šo masu inerces momentiem I :

$$[I]_e = \omega^2 \begin{bmatrix} -m_j & & 0 & 0 \\ 0 & -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{k+1} \end{bmatrix} \quad (5.3.)$$

Summējot matricas $[K]_e$, $[M]_e$, $[I]_e$, iegūst matricu (tipisko bloku) vienam galīgam elementam. Ja neievēro sijas izkliedēto masu, tad $[M]_e=0$. Ja nav koncentrētas masas, tad $[I]_e=0$. Saliekot pa diagonāli tipiskos blokus un labajā pusē ievietojot brīvos locekļus, iegūst vienādojumu sistēmu nezināmo pārvietojumu u_i un pagrieziena leņķu u'_i aprēķināšanai. Pirms risināšanas kopīgajā vienādojumu sistēmā jāievēro robežnoteikumi. Kad sistēma atrisināta, var aprēķināt lieces momentus un šķērsspēkus:

$$\mu(\eta) = EIu'' \sin \omega t, Q(\eta) = EIu''' \sin \omega t,$$

kas mainīsies tāpat kā uzspiedējspēks, tātad iekšējo spēku faktori arī mainīsies tāpat kā svārstību ierosinošais spēks.

6. SIJAS BRĪVĀS SVĀRSTĪBAS

Sijas brīvo svārstību gadījumā nav ierosinošo spēku un momentu.

Viena GE tipisko bloku iegūst tāpat kā uzspiesto svārstību gadījumā, t. i., sumējot tipiskos blokus: $[K]_e$, $[M]_e$, $[I]_e$.

Funkcionāli L_e (5.1.) lielumi: $P_k=0$, $M_k=0$, $P_{k+1}=0$, $M_{k+1}=0$, tādēļ vienādojumu sistēma ir lineāra homogēna algebrisku vienādojumu sistēma, kur brīvie locekļi vienādi ar nulli.

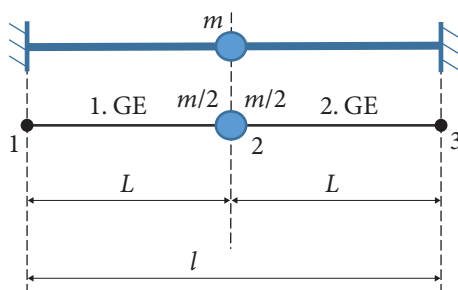
Šādai sistēmai “nenulles” atrisinājums iespējams tikai tad, ja sistēmas determinants $D=0$.

Lai no šī noteikuma ($D=0$) iegūtu vienādojumu pašsvārstību frekvenču noteikšanai, matricā $[M]_e$ (5.2.) uzspiedējspēka frekvence ω jānomaina ar pašsvārstību frekvenci p .

1. PIEMĒRS (Pašsvārstību frekvenču aprēķins ar GEM)

Noteikt sistēmas pašsvārstību frekvenci p .

Sija nostiprināta balstos, vidū novietota koncentrēta masa m , sijas izkliedēto masu neņem vērā. Sijas lieces stingums EI (6.1. att.).



6.1. att.

Siju sadala divos GE, katra GE garums ir L . Tā kā sijas masu neņem vērā, tad $[M]_e=0$.

Tipisko bloku iegūst, izmantojot sijas stinguma matricu $[K]_e$ (sk. 5.2.) un diagonālu matricu – standarta bloku $[I]_e$ (5.3.), kurā ņem vērā kinētisko enerģiju no koncentrētām masām GE galos m un šo masu inerces momentus I .

No diviem šādiem standarta blokiem $[K]_e$ un $[I]_e$ izveido vienādojumu sistēmas matricu.

$$[K]_e + p^2 [I]_e = \begin{bmatrix} A & B & -A & B \\ B & 2C & -B & C \\ -A & -B & A & -B \\ B & C & -B & 2C \end{bmatrix} + p^2 \begin{bmatrix} -\eta_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - m_k \omega^2 & B & -A & B \\ B & 2C - I_k \omega^2 & -B & C \\ -A & -B & A - m_{k+1} \omega^2 & -B \\ B & C & -B & 2C - I_{k+1} \omega^2 \end{bmatrix}$$

Shēma sijas kopīgās vienādojumu sistēmas izveidošanai no atsevišķiem blokiem:

$$\begin{bmatrix} \partial \Pi / \partial u_1 \\ \partial \Pi / \partial u'_1 \\ \partial \Pi / \partial u_2 \\ \partial \Pi / \partial u'_2 \\ \partial \Pi / \partial u_3 \\ \partial \Pi / \partial u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & & \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & & \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{red} & \text{orange} & \text{green} & \text{green} \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{orange} & \text{orange} & \text{green} & \text{green} \\ & & \text{green} & \text{green} & \text{green} & \text{green} \\ & & \text{green} & \text{green} & \text{green} & \text{green} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{blue} \\ \text{blue} \\ \text{orange} \\ \text{blue} \\ \text{blue} \\ \text{blue} \end{bmatrix}$$

Brīvie locekļi ir vienādi ar nulli, jo nav uzspiedējspēka.

Pēc robežnoteikumu ievērošanas (tie ir pārvietojumi mezglu punktos – balstos) paliek pāri tikai viens vienādojums:

$$\text{red} = 0 \quad \text{vai} \quad \left[(A - m_2 p^2) + (A - m_2 p^2) \right] u_2 = 0.$$

Tā kā punktā 2 masa vienam elementam ir $m/2$, tad $(2A - mp^2)u_2 = 0$.
No noteikuma, ka šīs sistēmas determinants ir vienāds ar nulli, iegūst:

$$2A - mp^2 = 0, \text{ un } p^2 = \frac{2A}{m} = \frac{24EI}{L^3 m} = \frac{192EI}{l^3 m}.$$

Tas sakrīt ar precīzo pašsvārstību frekvenci.

Stiprības aprēķins

Ar iepriekš aplūkotām metodēm, zinot svārstības ierosinošo spēku, var noteikt pārvietojumu amplitūdas un pēc tam arī visus inerces spēkus – $m_i \ddot{u}_i = m_i A^i \omega^2 \sin \omega t$.

Inerces spēki mainās laikā – tie ir laika funkcijas, bet statiskā slodze nemainās. Tādēļ spriegumus rēķina atsevišķi no statiskās slodzes un no inerces spēkiem.

Laikā mainīgajiem spēkiem izvēlas maksimālās vērtības – atmetot $\sin \omega t$. Iegūtās spriegumu amplitūdas un vidējās vērtības izmanto ilgizturības aprēķinos.

Ja statiskās slodzes nav, tad sprieguma amplitūda σ_a nedrīkst pārsniegt ilgizturības robežu $[\sigma]_{-1}$: $\sigma_a < [\sigma]_{-1}$.

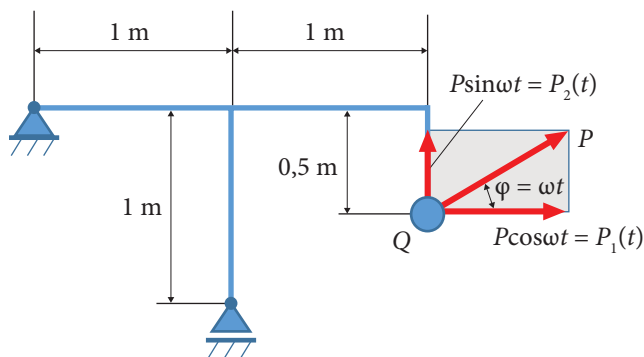
2. PIEMĒRS (Svārstību sistēmas stiprības aprēķins). SVĀRSTĪBU SISTĒMA AR DIVĀM KUSTĪBAS BRĪVĪBĀM. PLAKANS RĀMIS

Elektromotors, kura masa 80 kg, attiecīgi svars ir 800 N, rotējot rada centrālās spēku $P = 150$ N.

Elektromotora $n = 500$ apgr/min.

Rāmis izgatavots no dubulta T profila sijas Nr. 12.

Pārbaudīt rāmja stiprību.



6.2. att.

Rāmis ir plakans, elektromotors svārstoties var pārvietoties gan horizontāli, gan vertikāli, tādā tātad tā atrašanās vietu noteiks divas koordinātas, un svārstību sistēma būs ar divām kustības brīvībām – horizontālā un vertikālā virzienā. Svārstās koncentrēta masa – elektromotors, rāmja (elastīgā skeleta) masu neņem vērā.

Sistēmai ar vienu kustības brīvību pārvietojumu $u(t)$ rada uzspiedējspēks $P(t) = P \sin \omega t$ un inerces spēks $P = -m \ddot{u} \omega$:

$$u(t) = \delta(P \sin \omega t - m \ddot{u} \omega). \quad (6.1.)$$

Attiecinot šo pašu izteiksmi uz sistēmu ar daudzām kustības brīvībām, katrā i -tā vienādojuma labajā pusē ir jāievēro ne tikai i -tās kustības brīvības inerces spēku radītie pārvietojumi i -tajā virzienā, bet arī citu (j -to) masu (kustības brīvību) radītie pārvietojumi i -tajā virzienā: $\delta_{ij}m_j\ddot{u}_j\omega$.

Arī uzspiedējspēki katrā j -tā virzienā var būt dažādi. Pie uzspiedējspēkiem un inerces spēkiem jāievēro (jāpieskaita) papildu locekļi no citām kustības brīvībām. Uzdevums kļūst daudz sarežģītāks un to var vienkāršot.

Vispārinot izteiksmi (6.1.):

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} (P_j(t) - m_j \ddot{u}_j), \quad (6.2.)$$

N – kustības brīvību skaits.

Formulā ietvertas arī griezes kustības. Šī ir lineāru diferenciālvienādojumu sistēma ar konstantiem koeficientiem, kurai atrisinājumu meklē kā homogēnas vienādojumu sistēmas $P_j(t) = 0$ atrisinājuma un partikulārā atrisinājuma summu.

Aprēķinu var vienkāršot, ja apskata nostabilizējušos (stacionāru) procesu, kad sākuma nosacījumu noteiktās kustības jau ir rimušas, tādēļ atstāj tikai partikulāro atrisinājumu:

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^n A_k^i \sin \omega_k t,$$

saīsinot ar $\sin \omega t$, iegūst algebrisku vienādojumu sistēmu:

$$A_k^i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (P_k^j + \omega_k^2 m_j A_k^j).$$

Atstājot labajā pusē tikai brīvos locekļus:

$$A_k^i - \omega_k^2 \sum_{j=1}^N \delta_{ij} A_k^j = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} P_k^j; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Atrisinājums:

$$A_k^i = \frac{D_k}{D_s},$$

kur D_s – sistēmas determinants.

No sistēmas ar brīvajiem locekļiem nosaka svārstību amplitūdas A_k^i un pēc tam dinamiskos spēkus P_{id} .

No homogēnās sistēmas aprēķina pašsvārstību frekvences p_i , pielīdzinot D_s – sistēmas determinantu – nullei ($D_s = 0$). Šī ir precīzā metode p_i aprēķinam.

Svārstību sistēmas diferenciālvienādojumi

Motors darbojoties izraisa svārstības, piešķir sistēmai enerģiju, tātad svārstības ir uzspiestas.

Uzspiedējspēku P sadala komponentēs $P_1(t)$ un $P_2(t)$ (6.2. att.).

Uzspiesto svārstību diferenciālvienādojumus iegūst no (6.2.), rakstot pārvietojumus 1., t. i., horizontālajā virzienā, un 2., t. i., vertikālajā virzienā:

$$\begin{aligned}u_1 &= \delta_{11} (P_1(t) - m\ddot{u}_1) + \delta_{12} (P_2(t) - m\ddot{u}_2); \\u_2 &= \delta_{21} (P_1(t) - m\ddot{u}_1) + \delta_{22} (P_2(t) - m\ddot{u}_2).\end{aligned}$$

Atver iekavas un brīvos locekļus pārnes labajā pusē:

$$\begin{aligned}\delta_{11}m\ddot{u}_1 + \delta_{12}m\ddot{u}_2 + u_1 &= \delta_{11}P_1(t) + \delta_{12}P_2(t); \\ \delta_{21}m\ddot{u}_1 + \delta_{22}m\ddot{u}_2 + u_2 &= \delta_{21}P_1(t) + \delta_{22}P_2(t).\end{aligned}$$

Vertikālā uzspiedējspēka komponente ir bīstamāka nekā horizontālā, jo izraisa lielāku lieces momentu. Arī Q darbojas vertikālā virzienā. Turpmākajā aprēķinā ievērota ir tikai uzspiedējspēka vertikālā komponente $P_2(t)$, ko turpmāk apzīmē vienkārši ar $P(t)$. Abu uzspiedējspēku vienlaicīga ievērošana ievērojami sarežģītu atrisinājumu.

Uzspiesto svārstību diferenciālvienādojumi, ja darbojas tikai $P_2(t)$:

$$\begin{aligned}\delta_{11}m\ddot{u}_1 + \delta_{12}m\ddot{u}_2 + u_1 &= \delta_{12}P_2(t) = \delta_{12}P(t); \\ \delta_{21}m\ddot{u}_1 + \delta_{22}m\ddot{u}_2 + u_2 &= \delta_{22}P_2(t) = \delta_{22}P(t).\end{aligned}$$

Atrisinājumu meklē formā: $u_1 = A_1 \sin \omega t$ vai $u_1 = A_1 \sin \omega t$; $u_2 = A_2 \sin \omega t$, jo nostaibilizējušās svārstības svārstās ar uzspiedējspēka frekvenci ω .

Divas reizes atvasinot, iegūst:

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 &= -A_1 \omega^2 \sin \omega t; \\ \ddot{u}_2 &= -A_2 \omega^2 \sin \omega t.\end{aligned}$$

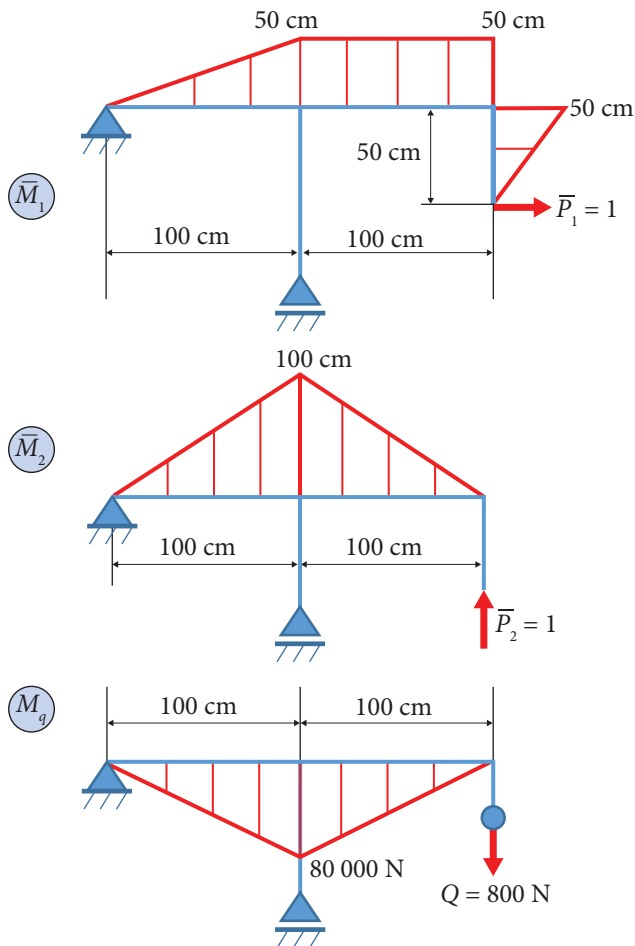
Vienādojumu sistēmā ievieto $u_1, u_2, \ddot{u}_1, \ddot{u}_2$:

$$\begin{aligned}-\delta_{11}mA_1\omega^2 \sin \omega t - \delta_{12}mA_2\omega^2 \sin \omega t + A_1 \sin \omega t &= \delta_{12}P \sin \omega t \\ -\delta_{21}mA_1\omega^2 \sin \omega t - \delta_{22}mA_2\omega^2 \sin \omega t + A_2 \sin \omega t &= \delta_{22}P \sin \omega t\end{aligned}$$

Saīsina ar $\sin \omega t$:

$$\begin{aligned}A_1 (1 - \delta_{11}m\omega^2) - A_2 \delta_{12}m\omega^2 &= \delta_{12}P \\ -A_1 \delta_{21}m\omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22}m\omega^2) &= \delta_{12}P\end{aligned}\tag{6.3.}$$

No šīs sistēmas var aprēķināt uzspiesto svārstību amplitūdas A_1 un A_2 , bet pirms tam jāaprēķina δ_{ij} , kas ir rāmja pārvietojumi no "vieniniekiem" virzienos i un j (6.3. att.).

Pārvietojumu d_{ij} aprēķins

6.3. att.

Momentu epīras ir vienkāršas ģeometriskas figūras, tādēļ pārvietojumus var aprēķināt ar Vereščagina paņēmienu.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{50 \times 100 \times 2 \times 50}{2 \times 3} + 50 \times 100 \times 50 + \frac{50 \times 50 \times 2 \times 50}{2 \times 3} \right) = \frac{37,5 \times 10^4}{EI} \text{ cm}^3;$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left(\frac{100 \times 100 \times 2 \times 50}{2 \times 3} + \frac{50 \times 50 \times 100}{2} \right) = \frac{41,66 \times 10^4}{EI} \text{ cm}^3;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2 \times 100 \times 100 \times 2 \times 100}{2 \times 3} \right) = \frac{66,66 \times 10^4}{EI} \text{ cm}^3.$$

Uzspiesto svārstību amplitūdu A_1 un A_2 aprēķins

Tā kā pārvietojumu aprēķina piemērā (52. lpp.) rāmja izmēri ņemti centimetros, tad arī šajā risinājumā turpināsim lietot centimetrus un par g mērvienību pieņemsim cm/s^2 . Tātad $g=981 \text{ cm/s}^2$.

Elektromotora masa

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{800}{981} = 0,815 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}}.$$

Uzspiesto svārstību frekvenci ω aprēķina, zinot dzinēja apgriezību skaitu $n=500$ apgr/min:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 52,3 \text{ s}^{-1}, \quad \omega^2 = 2738,6 \text{ s}^{-2}.$$

Rāmis ir izgatavots no tērauda, kam elastības modulis $E = 20 \text{ MN/cm}^2$.

Šķērsriezuma laukuma inerces moments no tabulas $I_x = 350 \text{ cm}^4$.

Aprēķina lielumus pie A_1 un A_2 :

$$1 - \delta_{11} m \omega^2 = 1 - \frac{37,5 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{EI} 0,815 \left[\frac{\text{Ns}^2}{\text{cm}} \right] 2738,6 \left[\text{s}^{-2} \right] = 1 - 0,12 = 0,88;$$

$$1 - \delta_{22} m \omega^2 = 1 - \frac{66,66 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{EI} 0,815 \left[\frac{\text{Ns}^2}{\text{cm}} \right] 2738,6 \left[\text{s}^{-2} \right] = 1 - 0,21 = 0,79;$$

$$\delta_{12} m \omega^2 = \delta_{21} m \omega^2 = \frac{41,66 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{EI} 0,815 \left[\frac{\text{Ns}^2}{\text{cm}} \right] 2738,6 \left[\text{s}^{-2} \right] = 0,13;$$

$$\delta_{12} P = \frac{37,5 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{EI} P = \frac{37,5 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{20^6 \left[\text{MN} \right] 350 \left[\text{cm}^4 \right]} 150 \text{ N} = 0,0080 \left[\text{cm}^{-1} \right];$$

$$\delta_{22} P = \frac{66,66 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{EI} P = \frac{66,66 \times 10^4 \left[\text{cm}^3 \right]}{20 \left[\text{MN} \right] 350 \left[\text{cm}^4 \right]} 150 \left[\text{N} \right] = 0,0143 \left[\text{cm}^{-1} \right].$$

Aprēķinātos lielumus ievieto vienādojumu sistēmā (6.3.):

$$\begin{aligned} A_1 (1 - \delta_{11} m \omega^2) - A_2 \delta_{12} m \omega^2 &= \delta_{12} P; \\ -A_1 \delta_{21} m \omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22} m \omega^2) &= \delta_{12} P. \end{aligned}$$

Pēc aprēķināto lielumu ievietošanas:

$$A_1 \times 0,88 - A_2 \times 0,13 = 0,0080;$$

$$-A_1 \times 0,13 + A_2 \times 0,88 = 0,0143.$$

(6.4)

Sistēmas (6.4.) atrisinājums:

$$A_1 = \frac{D_1}{D_s} = 0,0147 \text{ cm};$$

$$A_2 = \frac{D_2}{D_s} = 0,0225 \text{ cm}.$$

Svārstību sistēmas diferenciālvienādojumu atrisinājums:

$$u_1 = A_1 \sin \omega t = 0,0147 \sin \omega t;$$

$$u_2 = A_2 \sin \omega t = 0,0225 \sin \omega t.$$

Ilgizturības aprēķins

Motora masa

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{800 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}} \right]}{981 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right]} = 0,815 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}} \right].$$

Frekvenci ω aprēķina, zinot motora apgriezienu skaitu $n = 500 \left[\frac{\text{apgr}}{\text{min}} \right]$:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 52,3 \left[\text{s}^{-1} \right], \quad \omega^2 = 2738,6 \left[\text{s}^{-2} \right].$$

Dinamiskie spēki ir uzspiedējspēks $P(t)$ un inerces spēks $-m\ddot{u}$.

Abi šie spēki mainās pēc $\sin \omega t$.

$$P_{2d} = P_2(t) - m\ddot{u}_2 = P \sin \omega t + m0,0225\omega^2 \sin \omega t =$$

$$= 150 \sin \omega t + 0,815 \left[\frac{\text{Ns}^2}{\text{cm}} \right] 0,0225 \text{ cm} \times 2738,6 \left[\text{s}^{-2} \right] =$$

$$= (150 + 50,2) \sin \omega t = 200,2 \sin \omega t.$$

Statiskā slodze ir motora svārs $Q = 800 \text{ N}$ un statiskie spriegumi:

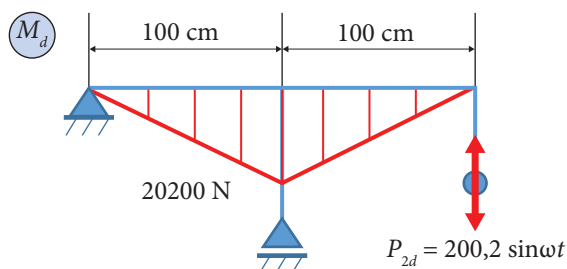
$$\sigma_{\text{st}} = \frac{M_q}{W_x} = \frac{80000 \left[\text{Ncm} \right]}{58,4 \left[\text{cm}^3 \right]} = 1370 \left[\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \right].$$

Dinamiskā slodze ir $P_{2d} = 200,2 \sin \omega t$ un dinamiskie spriegumi:

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W_x} = \frac{20,02 \sin \omega t \times 100 \left[\text{Ncm} \right]}{58,4 \left[\text{cm}^3 \right]} = 346,0 \sin \omega t \left[\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \right].$$

Maksimālo momenta vērtību no dinamiskās slodzes izvēlas no momenta M_d epīras (6.4. att.).

Dinamiskie spriegumi (6.5. att.) mainās tāpat kā dinamiskā slodze, tādēļ stiprība jānosaka kā ilgizturības aprēķinos, izmantojot drošības koeficientu.



6.4. att.

Drošības koeficients asimetriskā ciklā (6.5. att.):

$$k = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_v \varepsilon_m} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_v} = \frac{17000}{1 \times 34,6 + \frac{17000}{34000} 137} = 16,5,$$

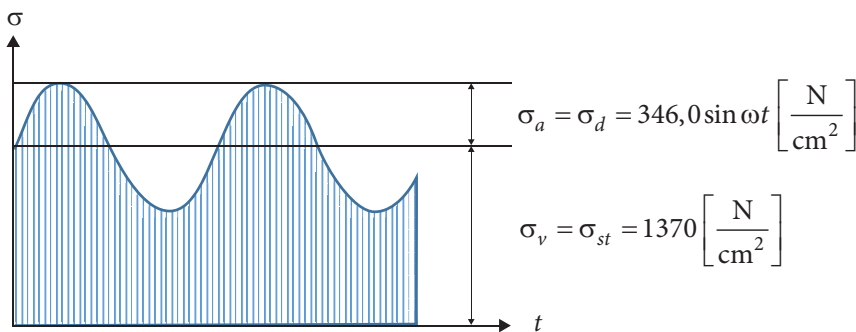
kur: ε_v – virsmas gluduma koeficients;

ε_m – mēroga koeficients;

k_{-1} – spriegumu koncentrācijas koeficients; visi koeficienti šeit tiek pieņemti par 1.

Materiāls ir tērauds, kam

$$\sigma_{-1} = 17000 \left[\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \right], \sigma_B = 34000 \left[\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \right].$$



6.5. att.

Pašsvārstību frekvenču aprēķins

Pašsvārstību frekvences var aprēķināt no brīvo svārstību vienādojumu sistēmas, kuru iegūst, uzspiesto svārstību vienādojumu sistēmā:

$$\begin{aligned} A_1 (1 - \delta_{11} m \omega^2) - A_2 \delta_{12} m \omega^2 &= \delta_{12} P \\ -A_1 \delta_{21} m \omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22} m \omega^2) &= \delta_{12} P \end{aligned}$$

uzspiedējspēka vietā liekot nulli un uzspiedējspēka frekvenci ω nomainot ar pašsvārstību frekvenci p .

Brīvo svārstību vienādojumu sistēma:

$$\begin{aligned} A_1(1 - \delta_{11}mp^2) - A_2\delta_{12}mp^2 &= 0 \\ -A_1\delta_{21}mp^2 + A_2(1 - \delta_{22}mp^2) &= 0 \end{aligned}$$

Šī ir homogēna algebrisku vienādojumu sistēma (visi brīvie locekļi ir nulles). Šādai sistēmai "nenulles" atrisinājums ir tikai tad, ja sistēmas determinants $D=0$. No šī noteikuma arī aprēķina pašsvārstību frekvences p_i .

Sistēmas determinants ir:

$$\begin{vmatrix} 1 - \delta_{11}mp^2 & -\delta_{12}mp^2 \\ -\delta_{21}mp^2 & 1 - \delta_{22}mp^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ jeb } (1 - \delta_{11}mp^2) \times (1 - \delta_{22}mp^2) - (\delta_{12}mp^2)^2 = 0,$$

sareizinot:

$$(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m^2p^4 - (\delta_{11}m + \delta_{22}m)p^2 + 1 = 0.$$

Šis ir kvadrātvienādojuma attiecībā pret $x = p^2$, $(ax^2 - bx + c = 0)$ atrisinājums:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$p_{1,2}^2 = \frac{\delta_{11}m + \delta_{22}m \pm \sqrt{(\delta_{11}m + \delta_{22}m)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m^2}}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m^2};$$

$$p_1 = 102,5 \text{ s}^{-1};$$

$$p_2 = 331,7 \text{ s}^{-1}.$$

Šis ir pašsvārstību frekvenču precīzās vērtības.

Pašsvārstību frekvenču aptuvenais aprēķins

Ar Donkerleja formulu var noteikt zemāko pašsvārstību frekvenci. Tā ir aptuvena formula, un tās rezultāts vienmēr ir mazāks par precīzo vērtību:

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2},$$

kur p_i ir pašsvārstību frekvence, ja sistēmai būtu tikai viena kustības brīvība i -tajā virzienā.

Sistēmai ar divām kustības brīvībām:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2};$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}};$$
$$p_1^2 = \frac{1}{\delta_{11}m};$$
$$\frac{1}{p^2} = \delta_{11}m + \delta_{22}m;$$
$$p = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m + \delta_{22}m}} = 90,7 \text{ s}^{-1}.$$

Ar Donkerleja formulu aprēķinātā pašsvārstību frekvence ir $p = 90,7 \text{ s}^{-1}$, kas ir mazāka par precīzo vērtību $p_1 = 102,5 \text{ s}^{-1}$

7. KOPSAVILKUMS

Kopsavilkumā ir norādīts:

- 1) slokojuma veids,
- 2) minimizējama funkcionalis vienam GE,
- 3) tipiskais bloks (matrica) un brīvo locekļu stabiņš vienam GE,
- 4) algebrisko vienādojumu sistēma matricu formā,
- 5) secinājumi par aprēķinātajiem lielumiem.

Sijas statiskā liece

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (u'')^2 d\eta - Pu - Mu'$$

A	B	-A	B	=	P_k	vai	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	=	P_k
B	2C	-B	C	=	M_k		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	=	M_k
-A	-B	A	-B	=	P_{k+1}		$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	=	P_{k+1}
B	C	-B	2C	=	M_{k+1}		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	=	M_{k+1}

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas aprēķina pārvietojumus u un u' .

Pēc tam aprēķina:

$$M = EIu'' \quad \text{un} \quad Q = EIu'''$$

Sija uz elastīga pamata

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta + \frac{1}{2} \beta \int_{-L/2}^{L/2} u^2 d\eta - P_i u_i - M_j u_j$$

$A + \frac{13}{35} L q_g$	$B + \frac{11}{210} L^2 q_g$	$-A + \frac{9}{10} L q_g$	$B - \frac{13}{420} L^2 q_g$	P_k
$B + \frac{11}{210} L^2 q_g$	$2C + \frac{1}{105} L^3 q_g$	$-B + \frac{13}{420} L^2 q_g$	$C - \frac{1}{140} L^3 q_g$	M_k
$-A + \frac{9}{10} L q_g$	$-B + \frac{13}{420} L^2 q_g$	$A + \frac{13}{35} L q_g$	$-B - \frac{11}{210} L^2 q_g$	P_{k+1}
$B - \frac{13}{420} L^2 q_g$	$C - \frac{1}{140} L^3 q_g$	$-B - \frac{11}{210} L^2 q_g$	$2C + \frac{1}{105} L^3 q_g$	M_{k+1}

$$([K] - [M])\{u\} = \{P\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas aprēķina pārvietojumus u un u' .

Pēc tam aprēķina:

$$M = EIu'' \quad \text{un} \quad Q = EIu''''.$$

Sijas lodes

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta - \frac{P}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (u')^2 d\eta$$

$A - \frac{6P}{5EI}$	$B - \frac{P}{10EI}$	$-A + \frac{6P}{5EI}$	$B - \frac{P}{10EI}$	0
$B - \frac{P}{10EI}$	$2C - \frac{2PL}{15EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$C + \frac{PL}{30EI}$	0
$-A + \frac{6P}{5EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$A - \frac{6P}{5EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	0
$B - \frac{P}{10EI}$	$C + \frac{PL}{30EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$2C - \frac{2PL}{15EI}$	0

$$([K] + [S])\{u\} = \{0\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas un no noteikuma, ka sistēmas determinants $D=0$, aprēķina:

$$P = P_{kr}.$$

Sijas liece un ļodze

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta - P_i u_i - M_j u_j - \frac{N}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (u')^2 d\eta$$

$A - \frac{6P}{5EI}$	$B - \frac{P}{10EI}$	$-A + \frac{6P}{5EI}$	$B - \frac{P}{10EI}$	P_k
$B - \frac{P}{10EI}$	$2C - \frac{2PL}{15EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$C + \frac{PL}{30EI}$	M_k
$-A + \frac{6P}{5EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$A - \frac{6P}{5EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	P_{k+1}
$B - \frac{P}{10EI}$	$C + \frac{PL}{30EI}$	$-B + \frac{P}{10EI}$	$2C - \frac{2PL}{15EI}$	M_{k+1}

$$([K] + [S])\{u\} = \{0\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas aprēķina pārvietojumus u un u' .

Pēc tam aprēķina:

$$M = EIu'' \quad \text{un} \quad Q = EIu''.$$

Sijas brīvās svārstības

$$L = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta - \frac{1}{2} \gamma FL p^2 \int_{-L/2}^{L/2} u^2 d\eta - \frac{1}{2} m_k u_k^2 p^2 - \frac{1}{2} I_k (u'_k)^2 p^2 - \\ - \frac{1}{2} m_{k+1} u_{k+1}^2 p^2 - \frac{1}{2} I_{k+1} (u'_{k+1})^2 p^2$$

$A - \frac{13}{35} \gamma FL p^2 - m_k p^2$	$B - \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$-A - \frac{9}{10} \gamma FL p^2$	$B + \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	0
$B - \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$2C - \frac{1}{105} \gamma FL p^2 - I_k p^2$	$-B - \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$C + \frac{1}{140} \gamma FL p^2$	0
$-A - \frac{9}{10} \gamma FL p^2$	$-B - \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$A - \frac{13}{35} \gamma FL p^2 - m_{k+1} p^2$	$-B + \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	0
$B + \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$C + \frac{1}{140} \gamma FL p^2$	$-B + \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$2C - \frac{1}{105} \gamma FL p^2 - I_{k+1} p^2$	0

$$([K] + [M] + [I])\{u\} = \{0\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas un no noteikuma, ka sistēmas determinants $D=0$, aprēķina sijas pašsvārstību frekvenci p .

Sijas uzspiestās svārstības

$$L = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(u'')^2 d\eta - P_k u_k - M_k u'_k - P_{k+1} u_{k+1} - M_{k+1} u'_{k+1} - \frac{1}{2} \gamma FL \omega^2 \int_{-L/2}^{L/2} u^2 d\eta - \frac{1}{2} m_k u_k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_k (u'_k)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_{k+1} u_{k+1}^2 \omega^2 - \frac{1}{2} I_{k+1} (u'_{k+1})^2 \omega^2$$

$A - \frac{13}{35} \gamma FL p^2 - m_k p^2$	$B - \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$-A - \frac{9}{10} \gamma FL p^2$	$B + \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	0
$B - \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$2C - \frac{1}{105} \gamma FL p^2 - I_k p^2$	$-B - \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$C + \frac{1}{140} \gamma FL p^2$	0
$-A - \frac{9}{10} \gamma FL p^2$	$-B - \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$A - \frac{13}{35} \gamma FL p^2 - m_{k+1} p^2$	$-B + \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	0
$B + \frac{13}{420} \gamma FL p^2$	$C + \frac{1}{140} \gamma FL p^2$	$-B + \frac{11}{210} \gamma FL p^2$	$2C - \frac{1}{105} \gamma FL p^2 - I_{k+1} p^2$	0

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{M}] + [\mathbf{I}])\{u\} = \{P\}$$

No kopīgās vienādojumu sistēmas aprēķina pārvietojumus $u(t)$, pēc tam lieces momentus un šķērsspēkus:

$$M(t) = EIu'' \quad \text{un} \quad Q(t) = EIu''.$$

LITERATŪRA

1. Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. University of Wisconsin -Madison. 1989.
2. A. Bedford, W. Fowler. *Engineering Mechanics Statics & Dynamics*. University of Texas. 2005.
3. E. Lavendelis. *Materiālu pretestība*. Rīga, 1986. 340 lpp.
4. E. Lavendelis. *Mehānika*. Rēzekne. 2015, 271 lpp.
5. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Москва 1967 г.
6. С. П. Тимошенко, ДЖ. Гери, *Механика материалов*. Москва, 1976.
7. *Расчеты на прочность в машиностроении*. Под ред. С. Д. Пономарева. Москва 1956–1959 гг.
8. Метод конечных элементов в сопротивлении материалов. Ю. Калинка. РПИ, Рига 1985.
9. J. Auzukalns, E. Ceplītis, I. Kalniņš, I. Liepiņš. *Materiālu pretestība uzdevumos*. Rīga, 1973.



**JURIS
KALINKA**

Dr. sc. ing. (mehānikas nozarē)
Juris Kalinka 1965. gadā absolvējis Rīgas Politehnisko institūtu. Zinātņu doktora grādu ieguvis 1973. gadā. Kopš 1970. gada, būdams docents un pētnieks Materiālu pretestības katedrā, māca studentiem dažādus mehānikas nozares priekšmetus. Zinātniskais darbs saistīts ar kompozītmateriālu mehāniku. No 2023. gada ir Rīgas Tehniskās universitātes Būvniecības un mašīnzinību fakultātes docents.
